

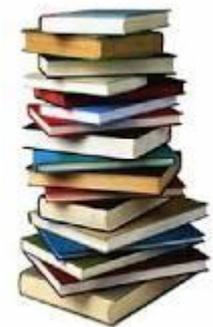
# Электродинамика

1. Лекции + семинары
2. экзамен

Электродинамика ?  
Это элементарно,  
Ватсон !

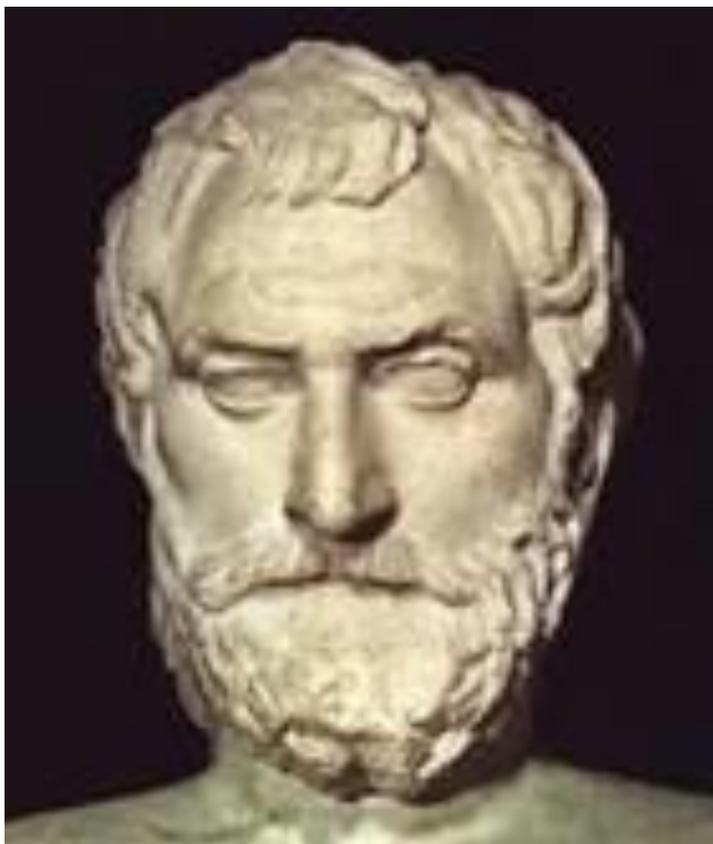


1. А.Н. Матвеев. Электродинамика. М., Высшая школа, 1980.
2. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. М., Теория поля. Наука, 1973.
3. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. М., Наука, 1982
4. В.Г. Левич. Курс теоретической физики. т. 1, М. Наука, 1969.
5. И.Е. Тамм. Основы теории электричества. М., Наука, 1989.

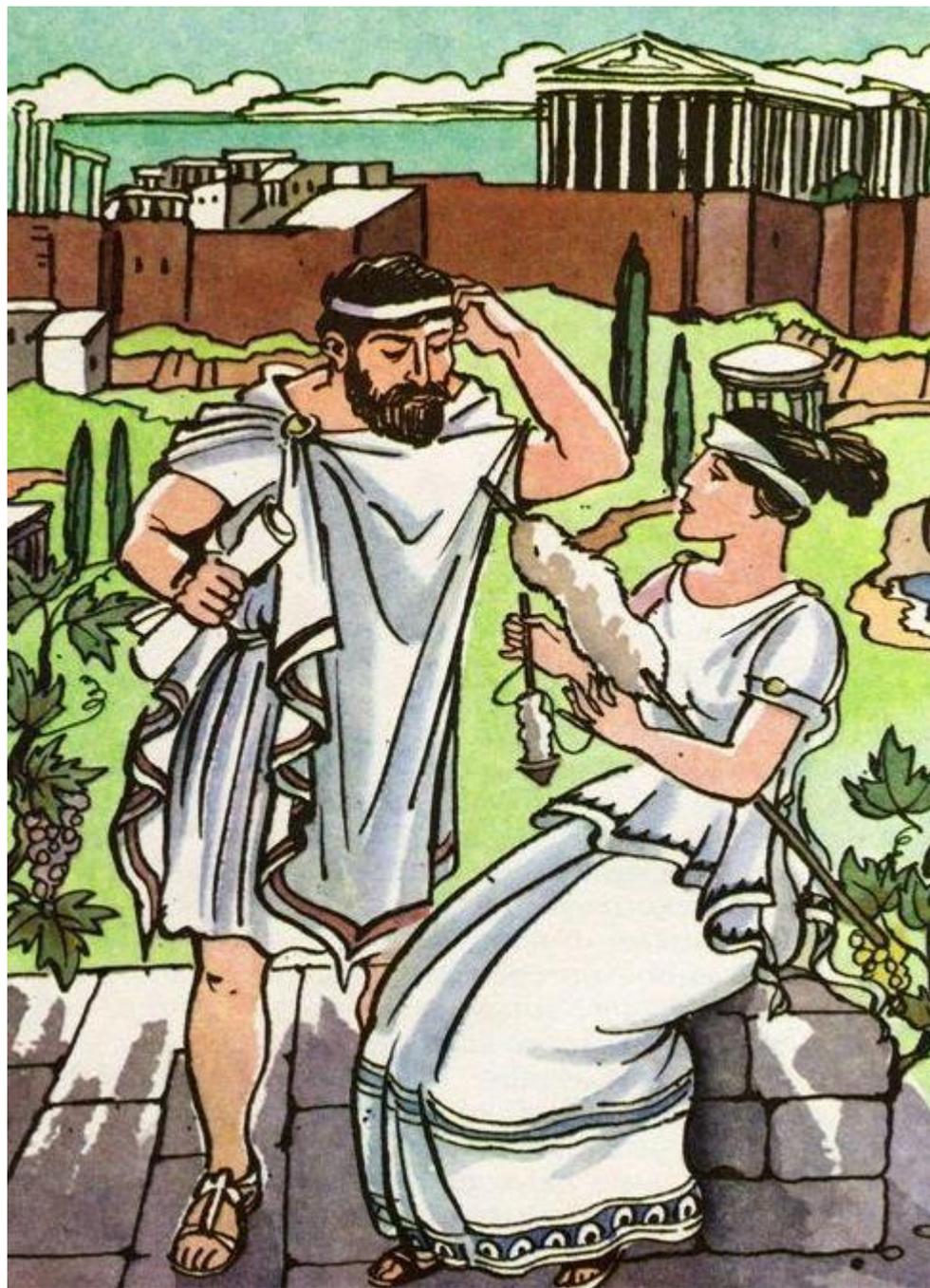


6. В.П. Батыгин, И.Н. Топтыгин. Сборник задач по электродинамике. М. Наука 1962.
7. Н.В. Нетребко, И.П. Николаев, М.С. Полякова, В.И. Шмальгаузен. Электричество и магнетизм. Практические занятия по физике для студентов-математиков, часть III (под редакцией В.А. Макарова). М., Макс-пресс, 2006.
8. Н.Н. Брандт, Г.А. Миронова, А.М. Салецкий. Электростатика в вопросах и задачах. Пособие по решению задач для студентов. Санкт-Петербург, Лань, 2011.

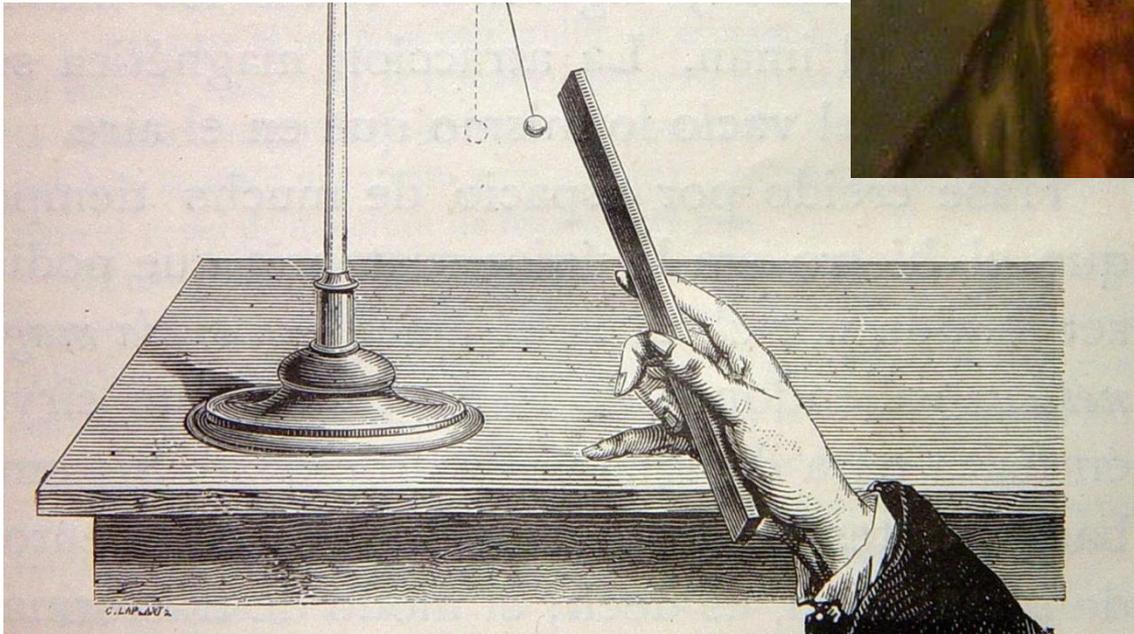




Фалес из Милета  
(624—548 до н. э)

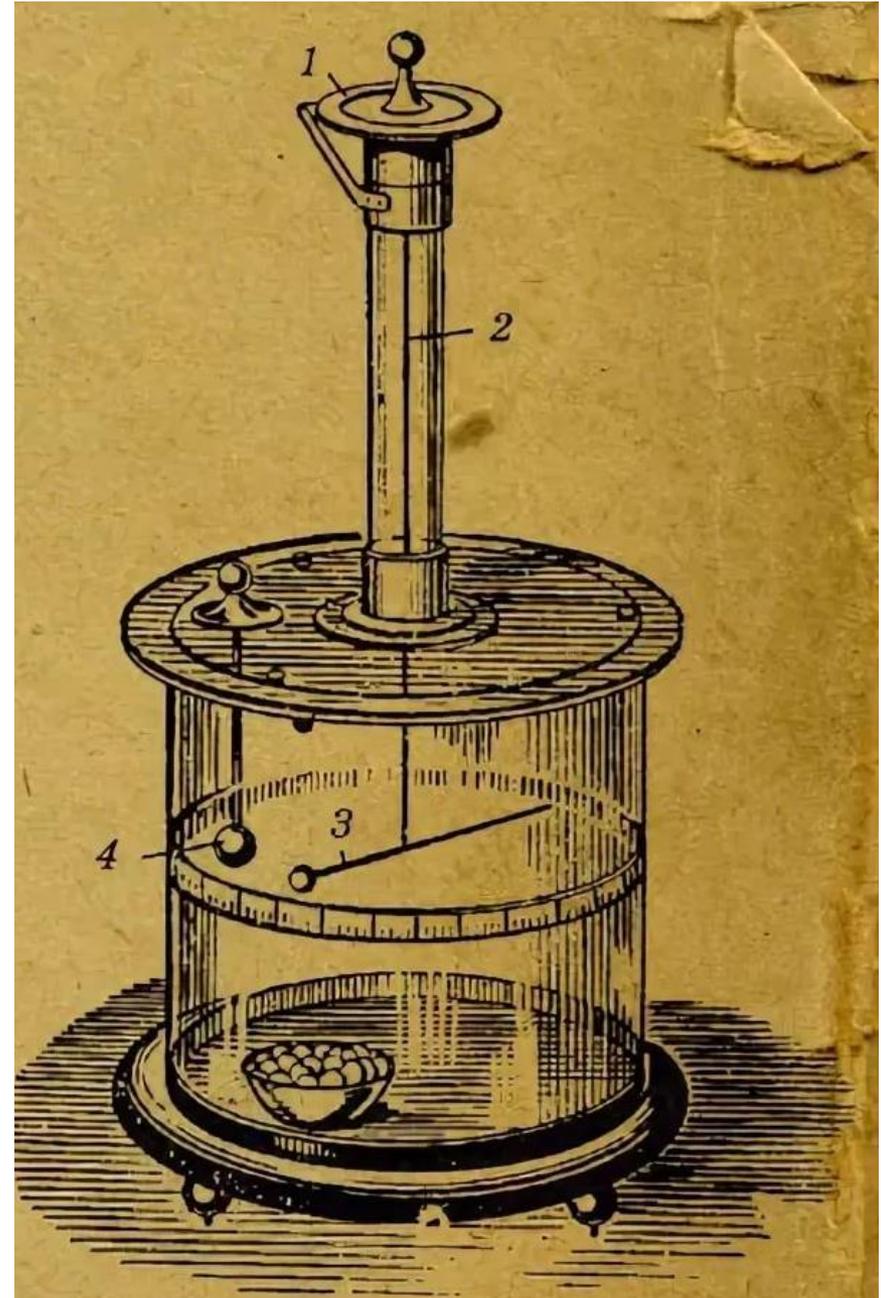


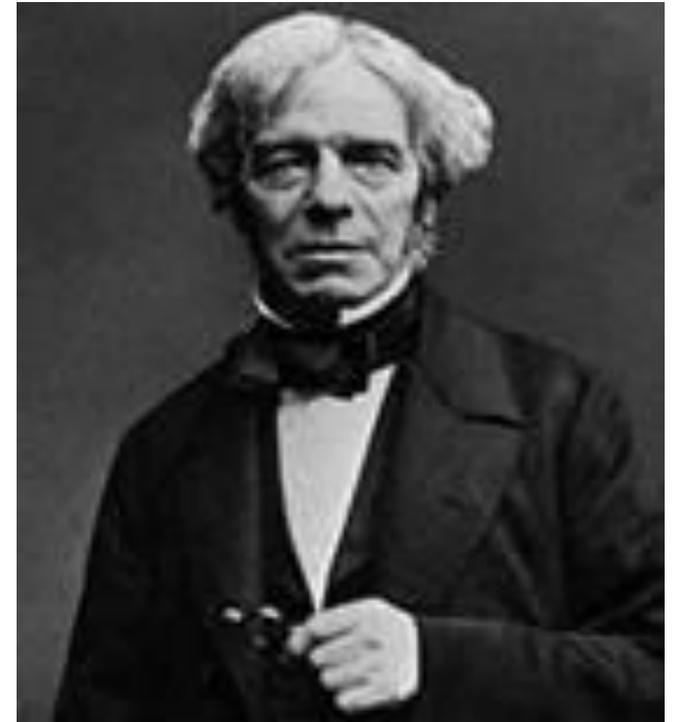
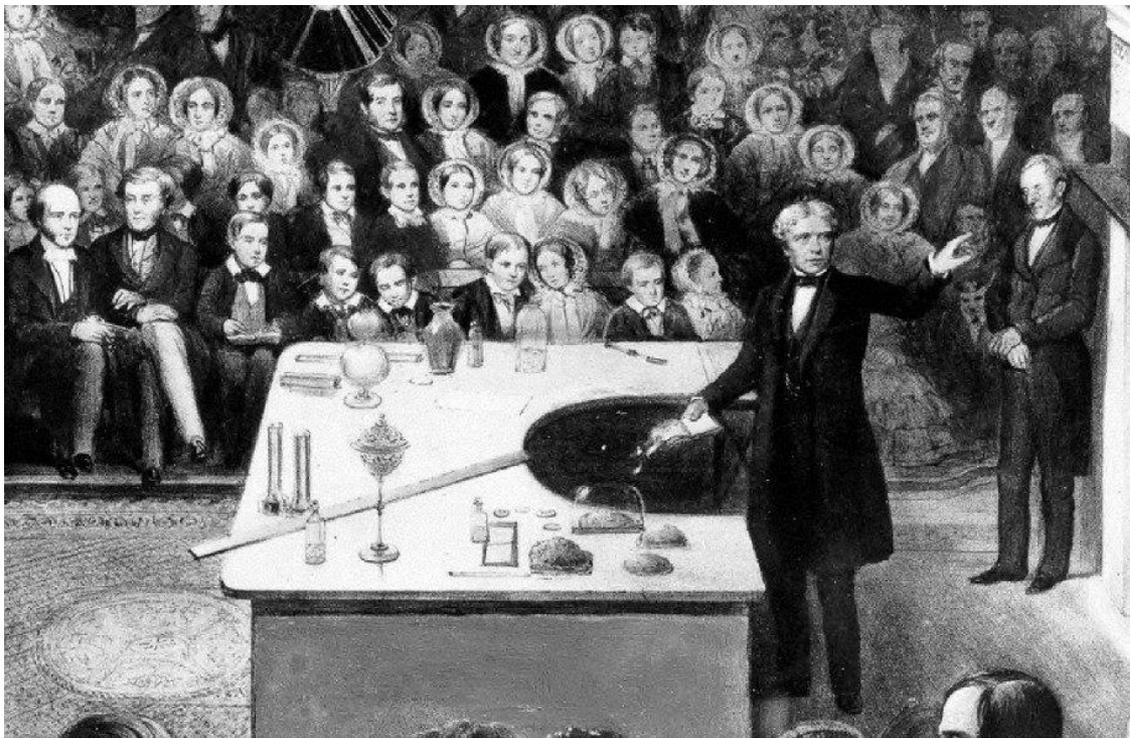
# Вильям Гильберт (1544—1603)





Шарль Огюстен Кулон  
(1736— 1806)





Майкл Фарадей  
(1791 — 1867)

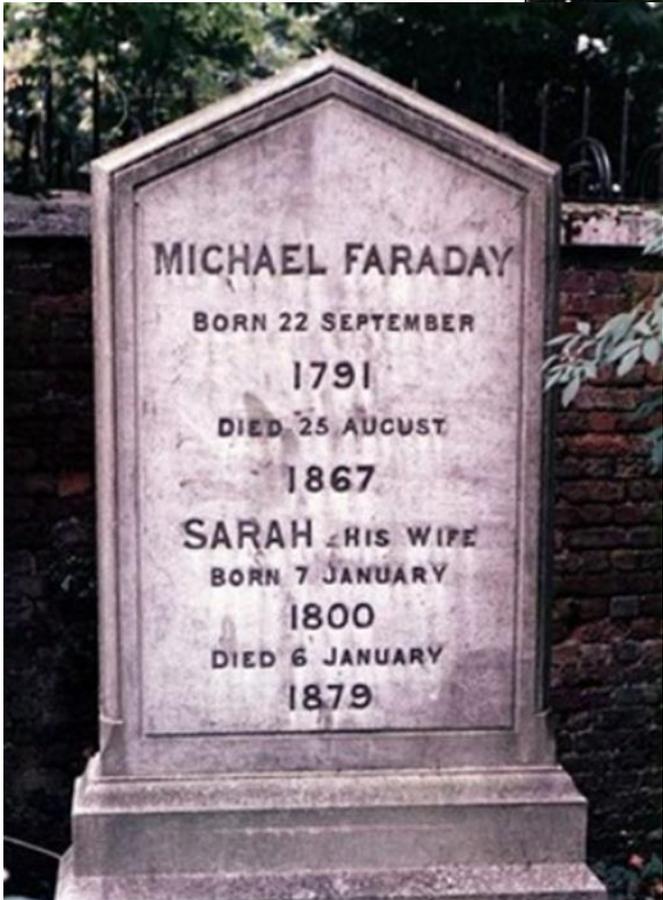
## Великобритания, 20 фунтов, 1993

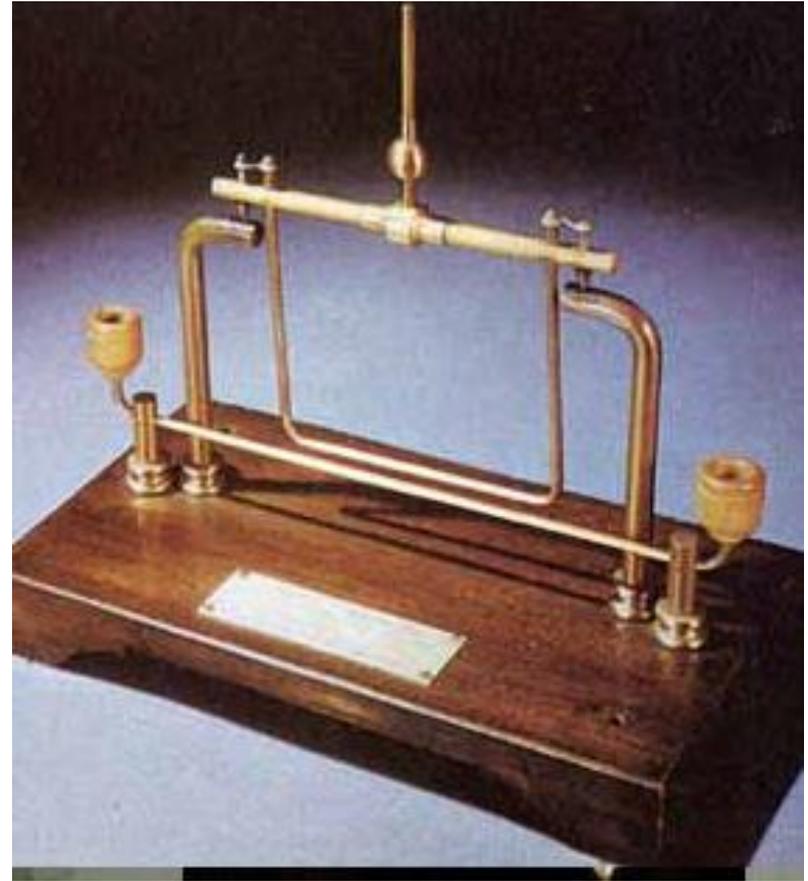


**«ОДНАЖДЫ, СЭР, ВЫ ОБЛОЖИТЕ ЕГО  
НАЛОГОМ»**

**(Ответ Майкла Фарадея на вопрос канцлера казначейства  
Великобритании о практической пользе электричества),  
родился 22 сентября 1791 года**

Оригинальные цвета банкнот несколько изменены





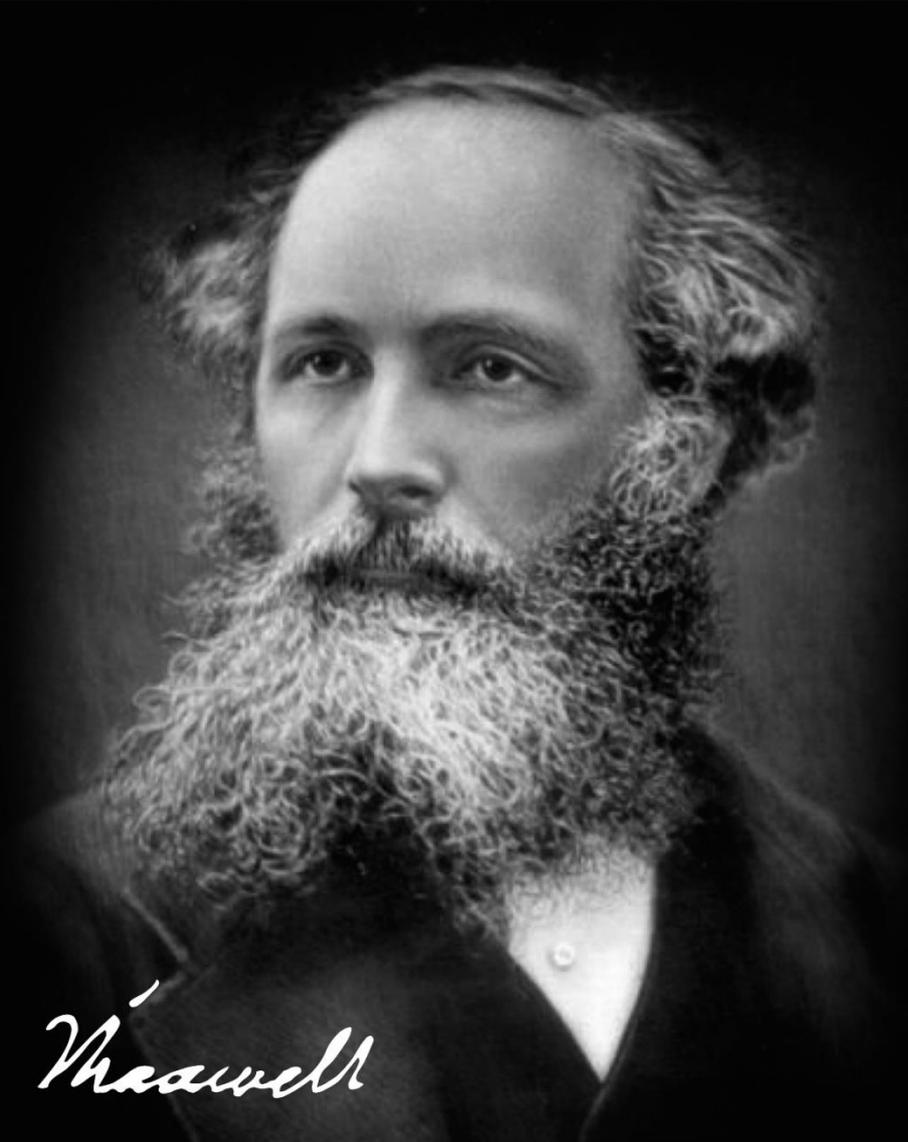
Ампер Андре Мари  
(1775 — 1836)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

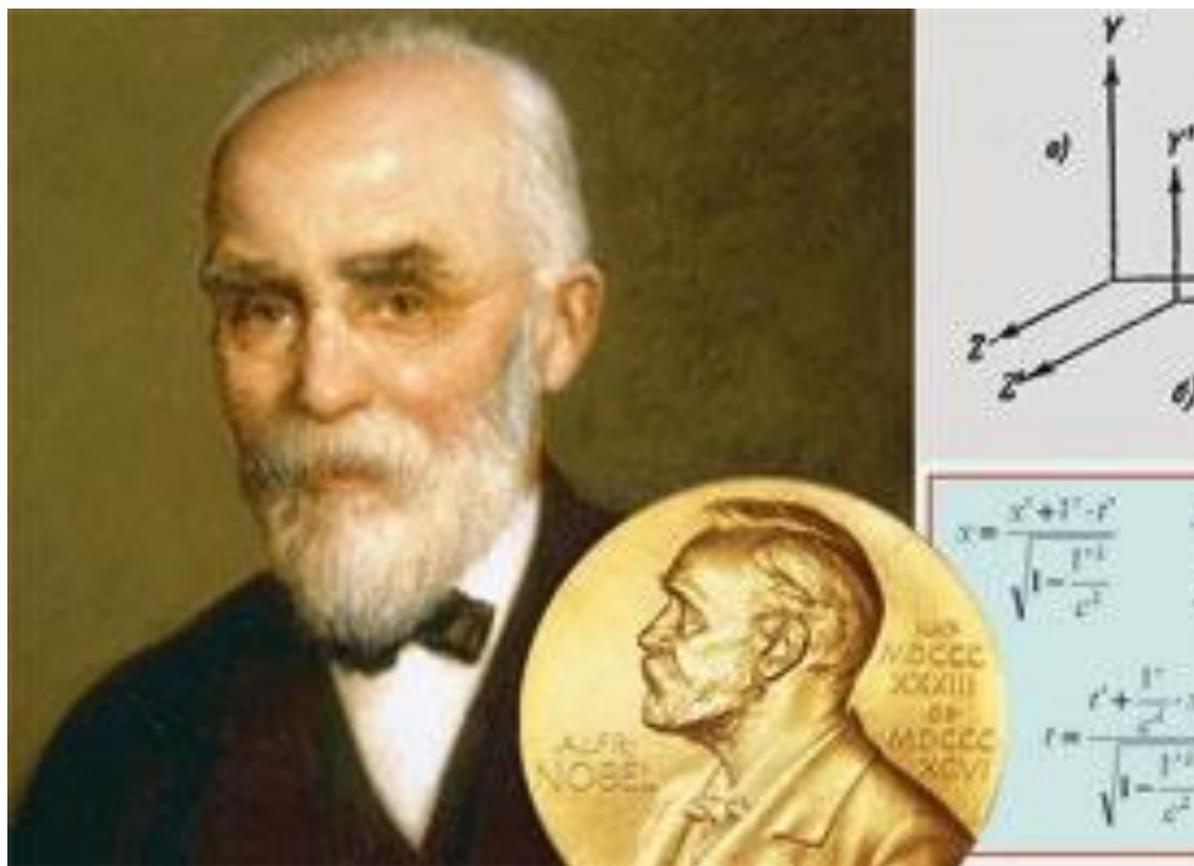
$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

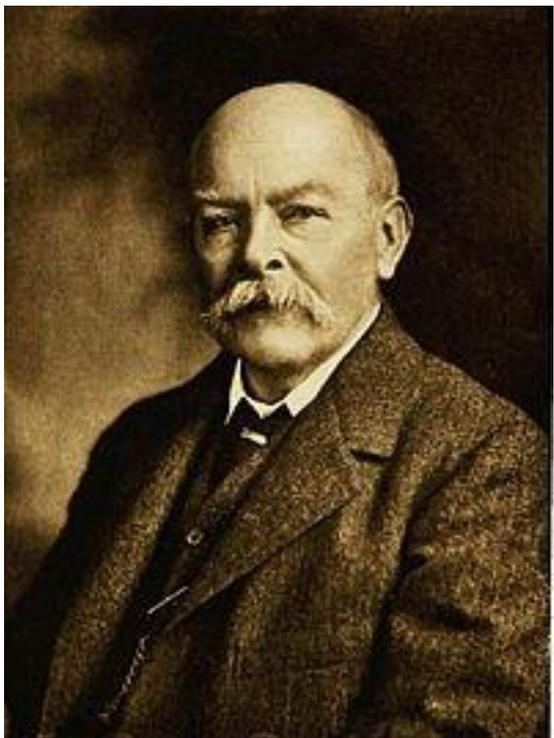
A black and white portrait of James Clerk Maxwell, showing him from the chest up. He has a full, curly beard and is looking slightly to the right of the camera.

*J. Clerk Maxwell*

Джеймс Кларк Максвелл  
(1831 — 1879)



Лоренц Хендрик Антон  
(1853 — 1928)



Джон Генри Пойнтинг  
(1852 — 1914 )

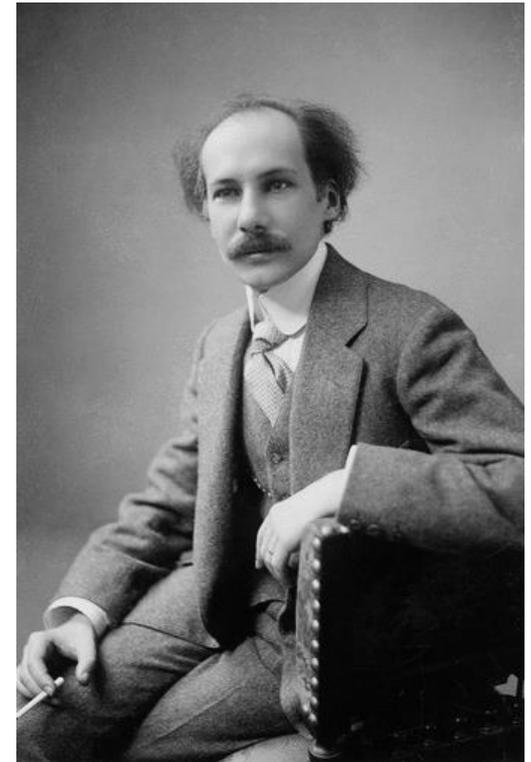


Николай Алексеевич Умов  
(1846 — 1915)

И было: много, много дум,  
И метафизики, и шумов...  
И строгой физикой мой ум  
Переполнял профессор Умов.

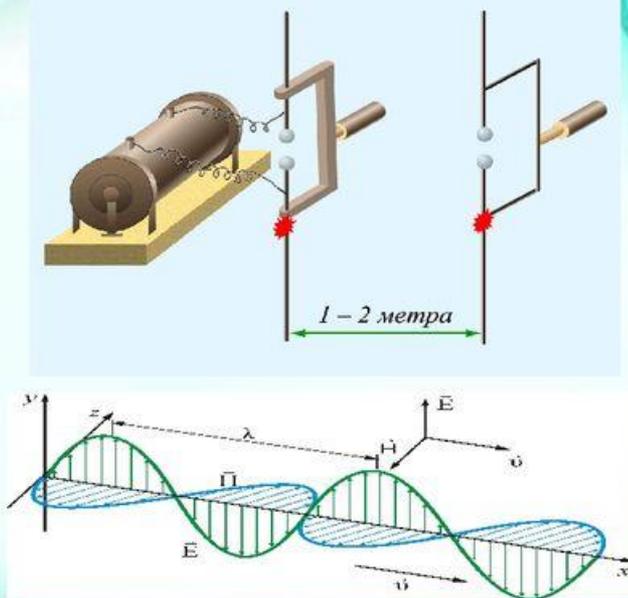
Над мглой космической он пел,  
Развив власы и выгнув выю,  
Что парадоксами Максвелл  
Уничтожает энтропию, —

Что взрывы, полные игры,  
Таят томсоновы вихри  
И что огромные миры  
В атомных силах не утихли...

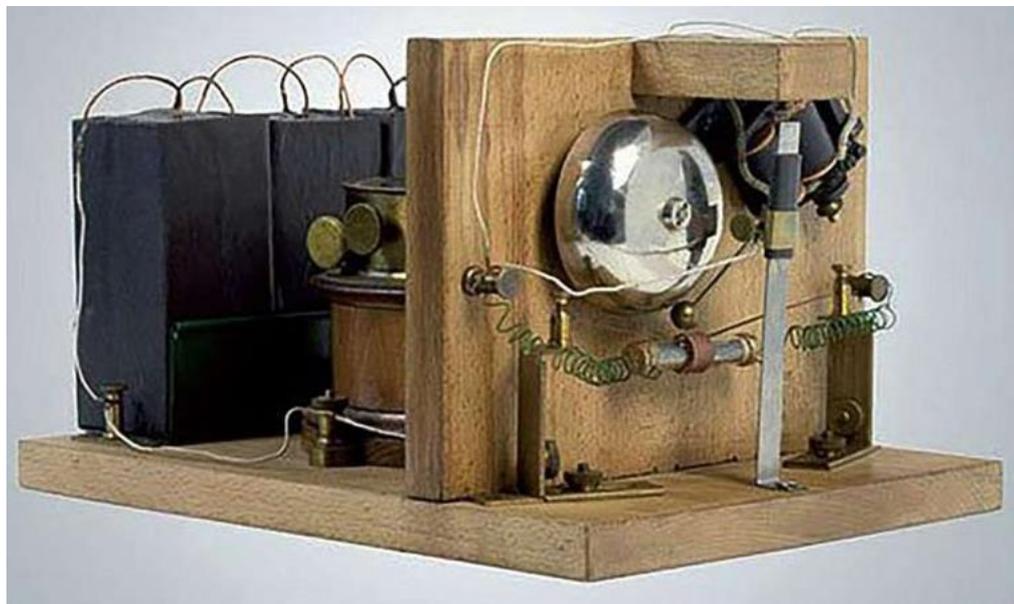


Андрей Белый

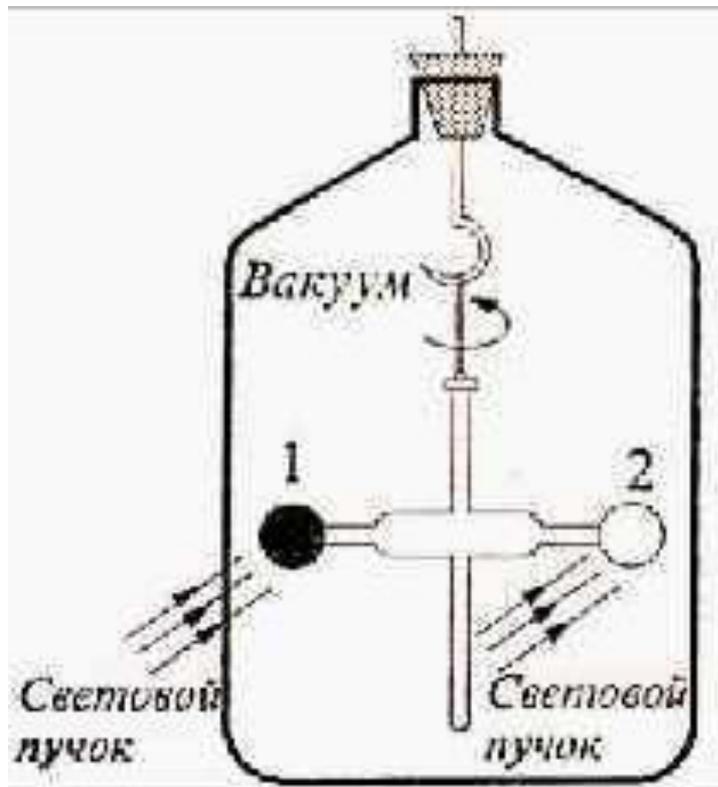
Опыт Герца по обнаружению электромагнитных волн (1887 год)



Генрих Герц  
(1857 — 1894)



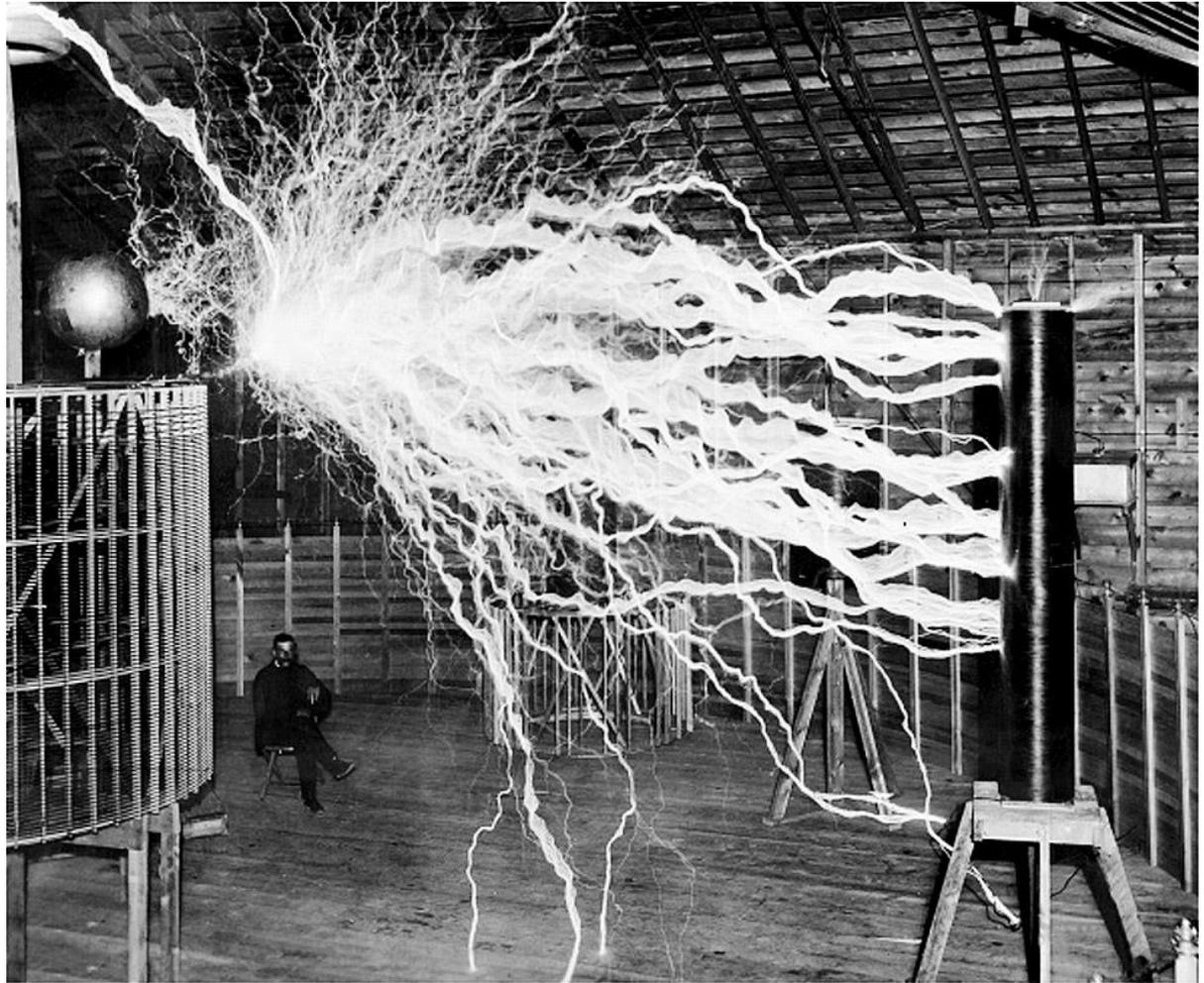
Александр Степанович Попов  
(1859 — 1905)



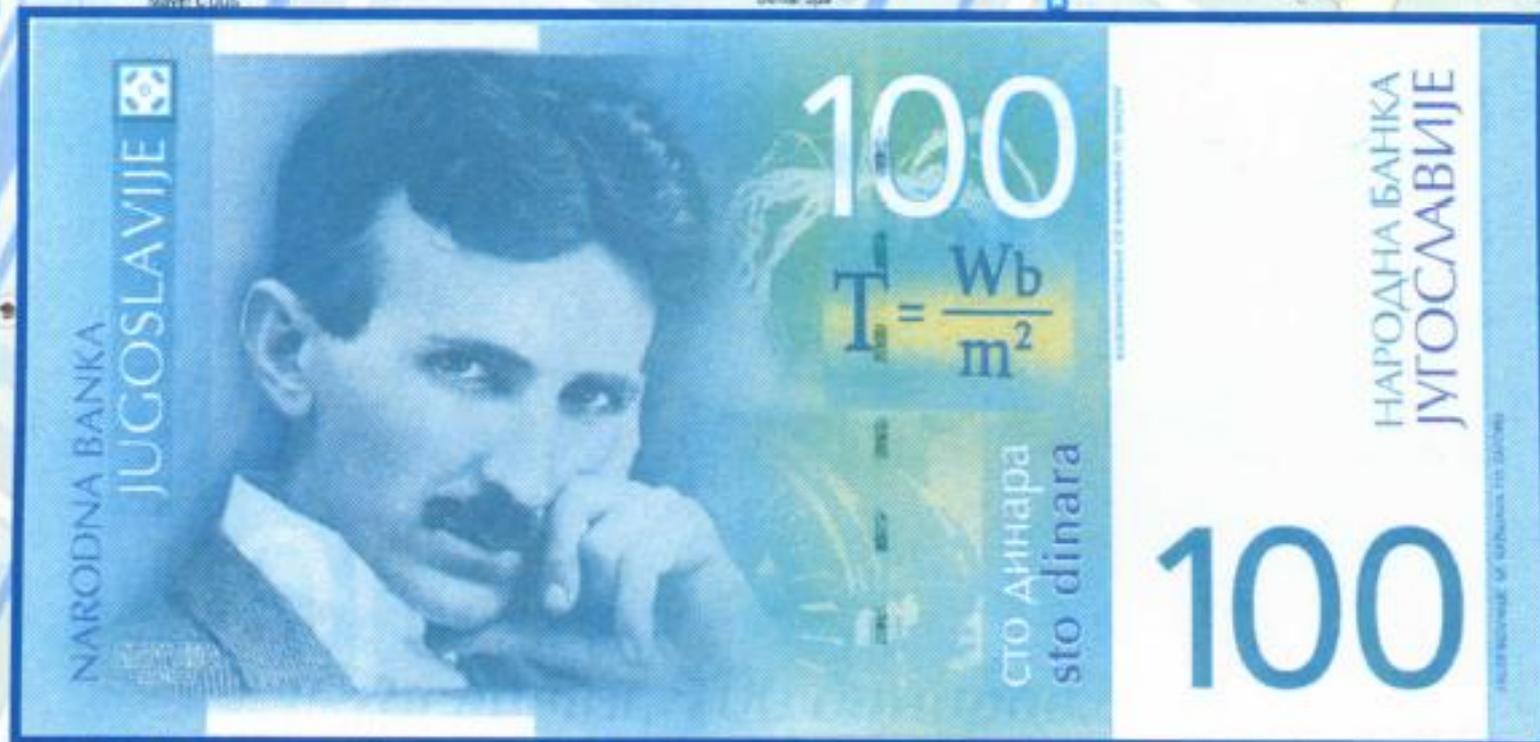
Петр Николаевич Лебедев  
(1866 — 1912)



Никола Тесла  
(1856 — 1943)



# Югославия, 100 динаров, 2000



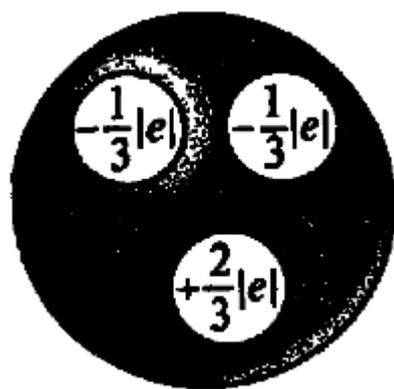
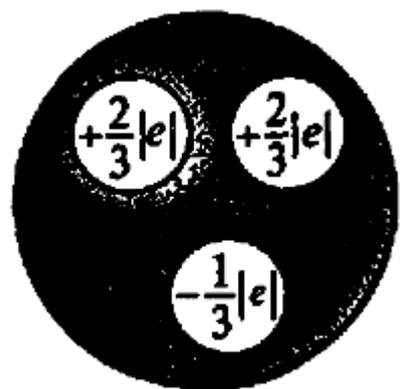
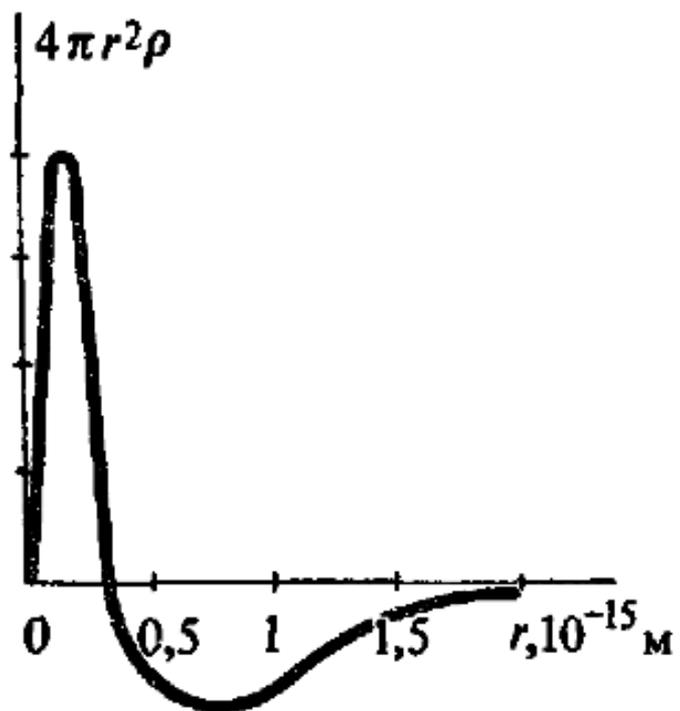
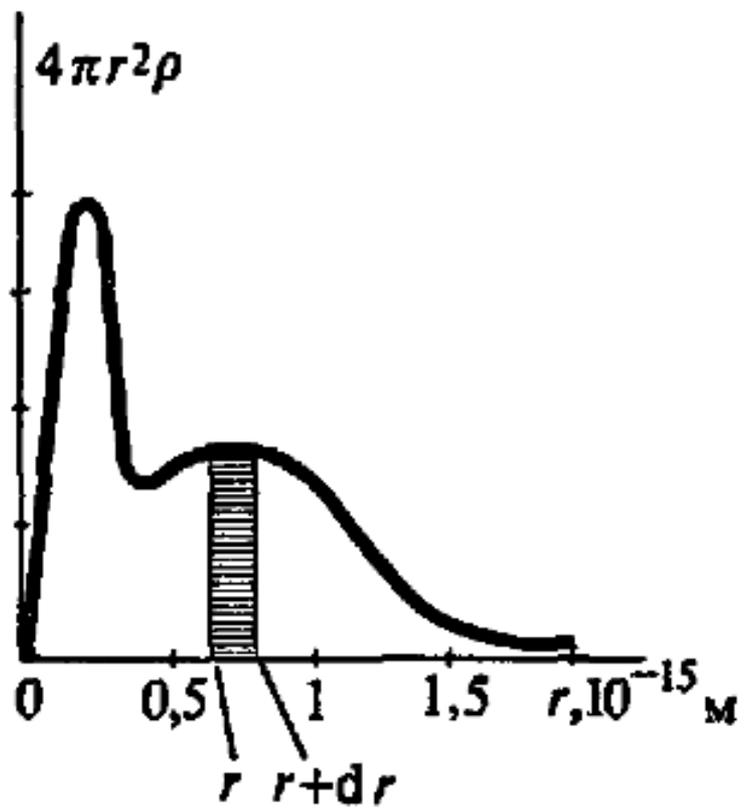
Оригинальные цвета банкнот несколько изменены

**«ВАМ ЗНАКОМО ВЫРАЖЕНИЕ «ВЫШЕ ГОЛОВЫ  
НЕ ПРЫГНЕШЬ»? ЭТО ЗАБЛУЖДЕНИЕ.  
ЧЕЛОВЕК МОЖЕТ ВСЁ»**

**Никола Тесла,  
родился 10 июля 1856 года**

Существует лишь небольшое число частиц с бесконечным временем жизни. Это электрон, протон и их античастицы

$$e = 1,6021892 \dots \times 10^{-19} \text{ кулон}$$

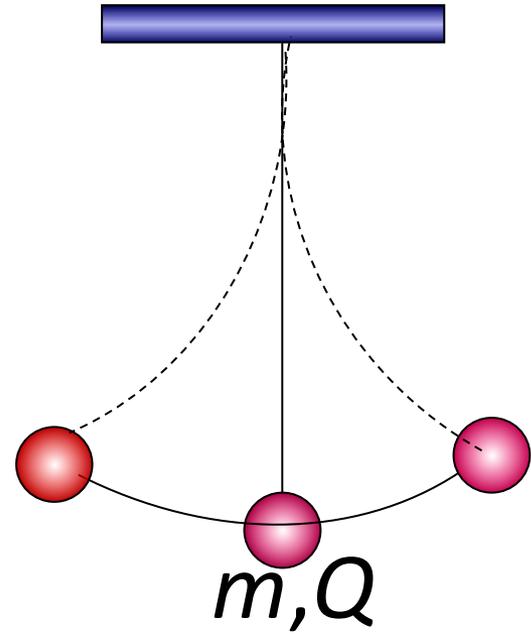


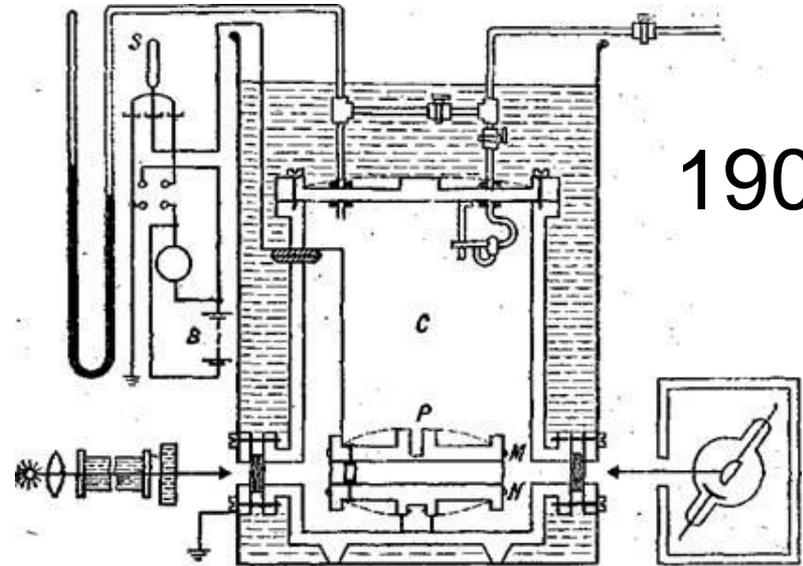
# Резонансный метод

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \frac{qE_0}{ml} \cos \omega t$$

$$\omega_0 \approx \omega$$

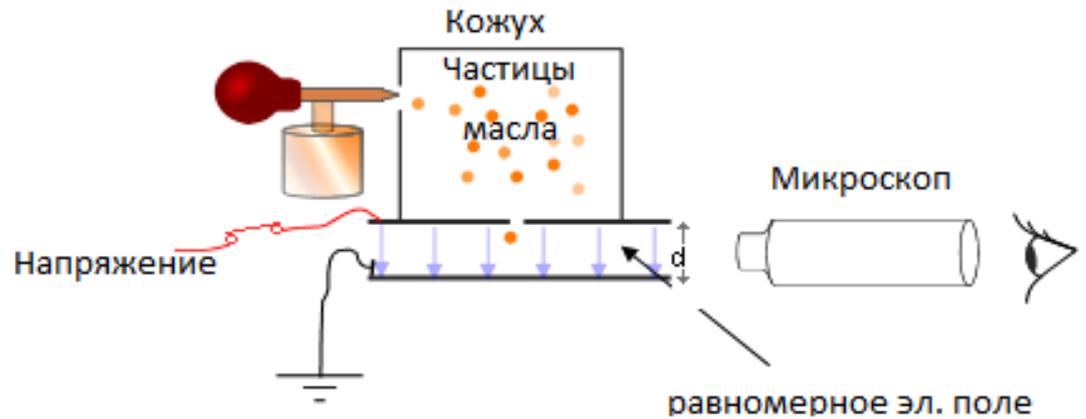
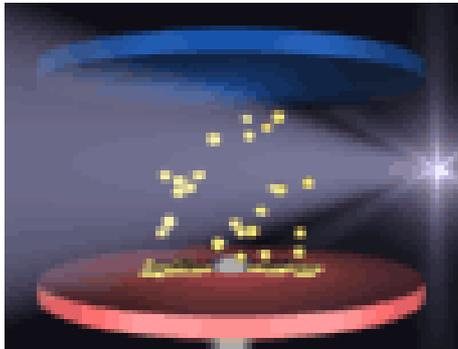
$$\varphi_{\max} \approx \frac{qE_0}{2\delta m \omega_0 l}$$





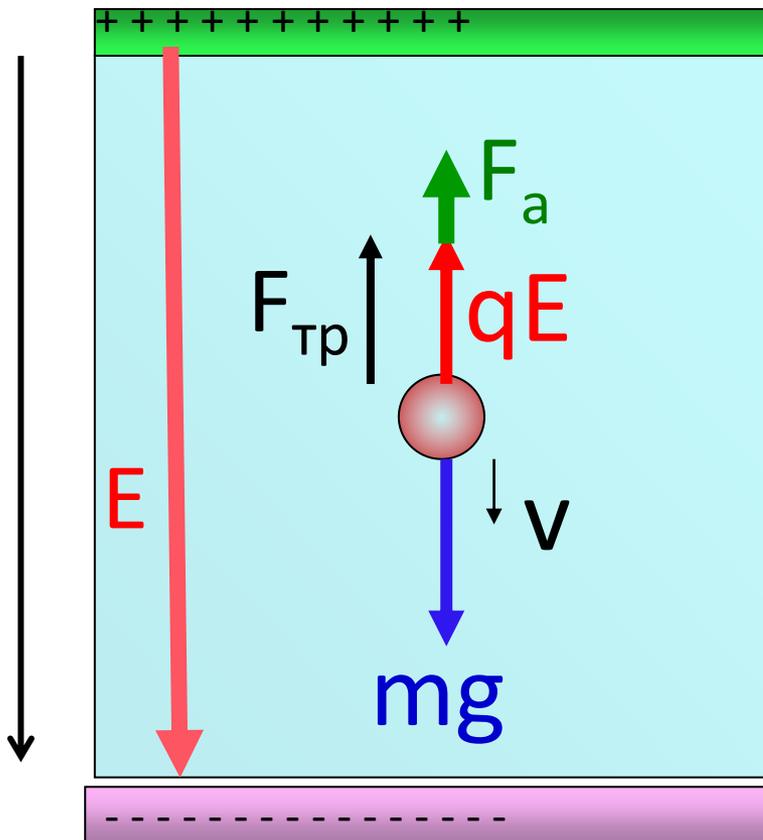
1909 г.

Милликен  
Роберт Эндрус



$$e = 1,6021892 \dots \times 10^{-19} \text{ кулон}$$

# Опыт Милликена 1909 г.

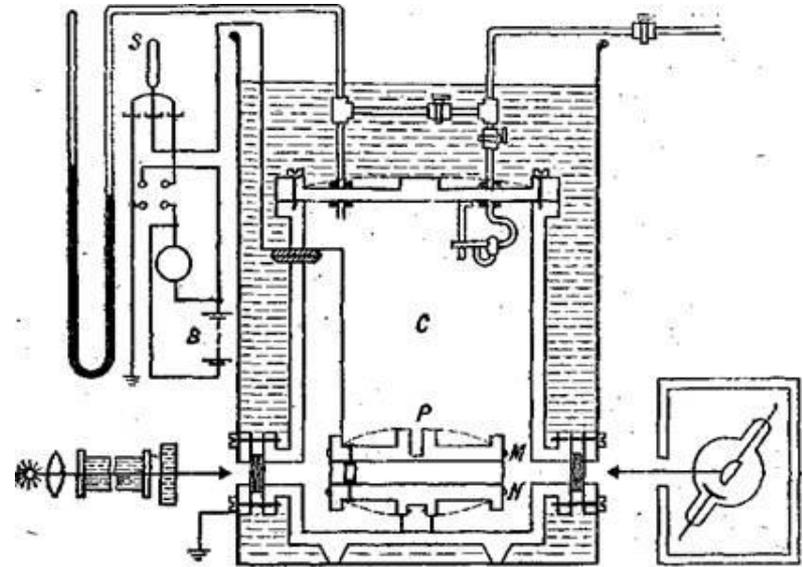


$$-\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_e g - qE + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_k g - \alpha v = 0,$$

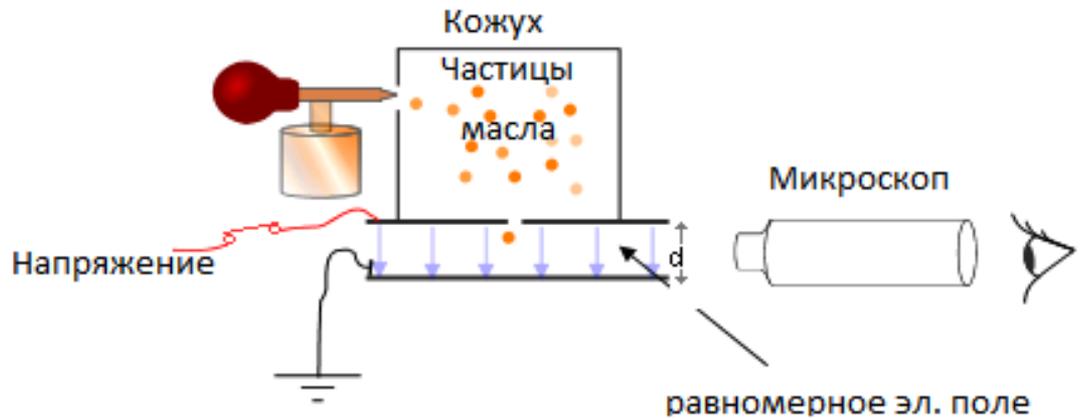
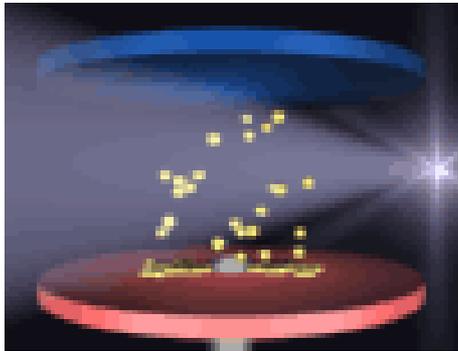
$$-\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_e g + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_k g - \alpha v_1 = 0$$

$$-\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_e g - q_1 E + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_k g - \alpha v_2 = 0$$

$$\Delta q_{\min} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$



Милликен  
Роберт Эндрус



$$e = 1,6021892 \dots \times 10^{-19} \text{ кулон}$$

$$\frac{e_+ - e_-}{e_{\pm}} \leq 10^{-21}$$

Нейтральность отдельных атомов  
проверялась прямыми экспериментами

# Закон сохранения заряда

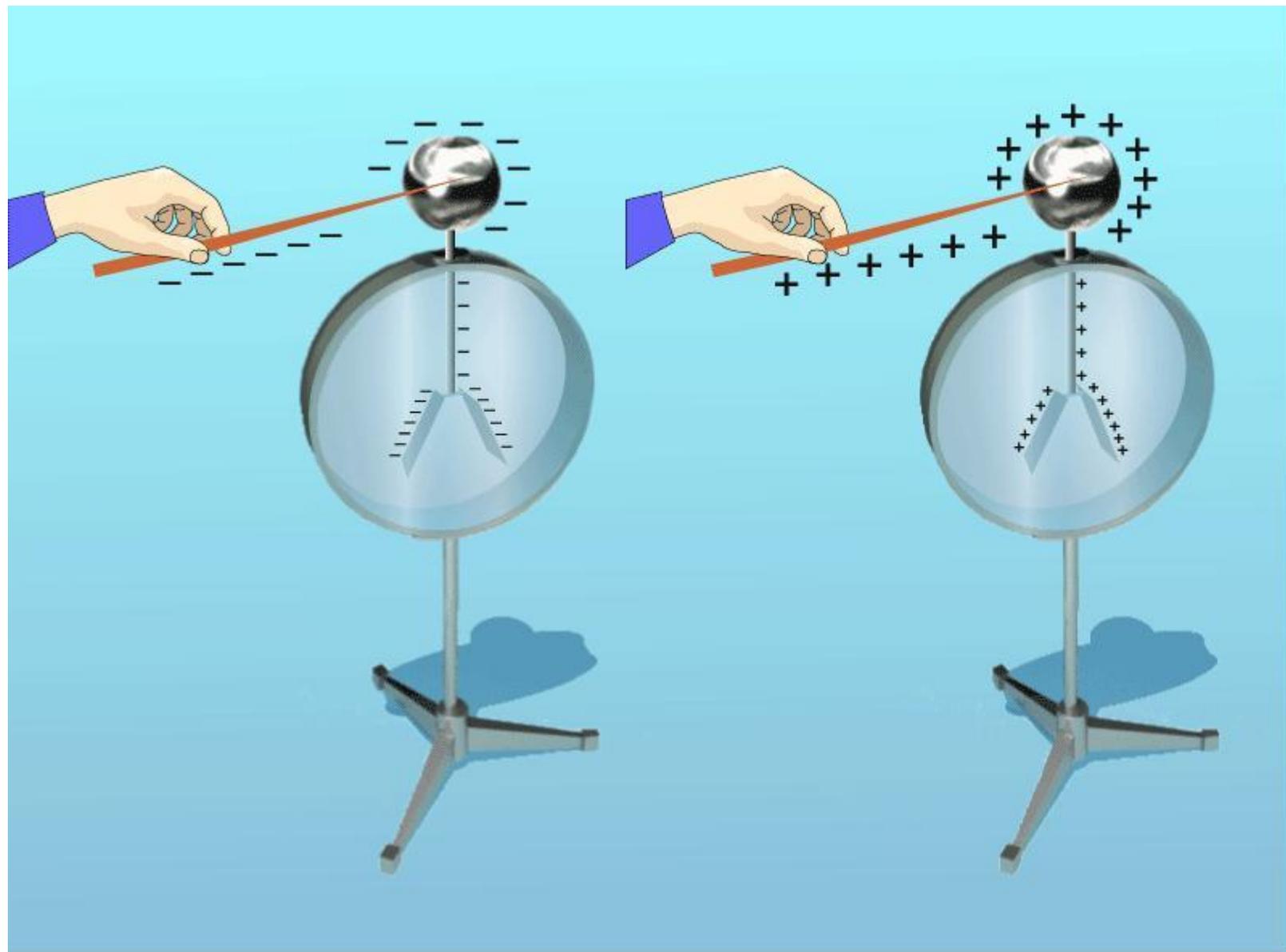
1. Электроны и протоны — частицы с бесконечным временем жизни, их заряды инвариантны при переходе от одной инерциальной системы координат к другой и не зависят от скорости.
2. При любом процессе взаимопревращения частиц их суммарный заряд до взаимодействия равен суммарному заряду после взаимодействия.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = - \oint_{S_0} \mathbf{j} ds$$

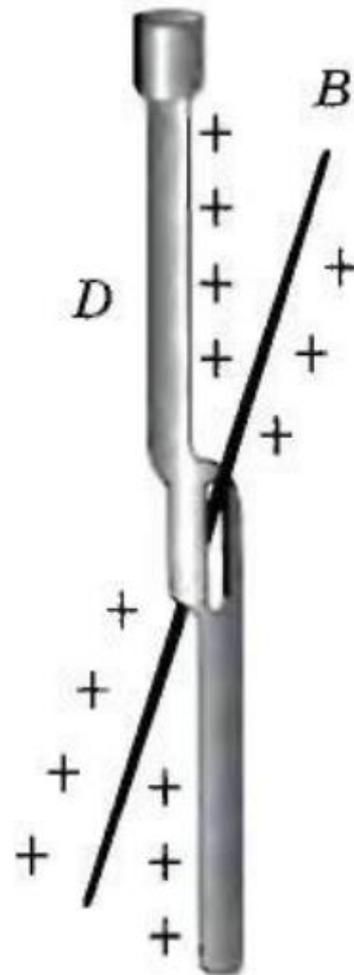
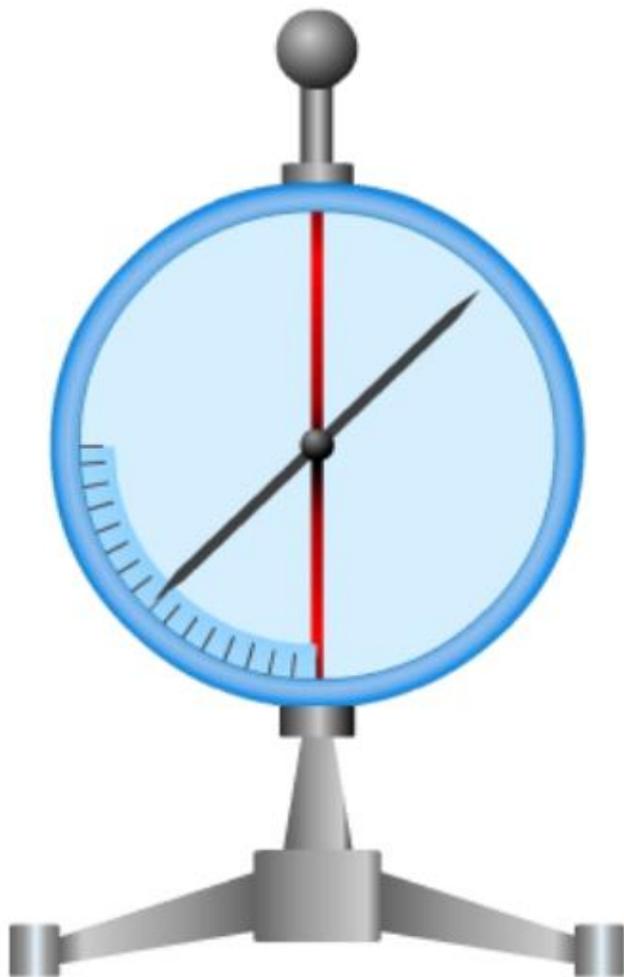
$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho dv = \int_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \quad \int_{S_0} \mathbf{j} d\mathbf{S} = \int_{V_0} \operatorname{div} \mathbf{j} dv$$

Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$$



# Электрометр



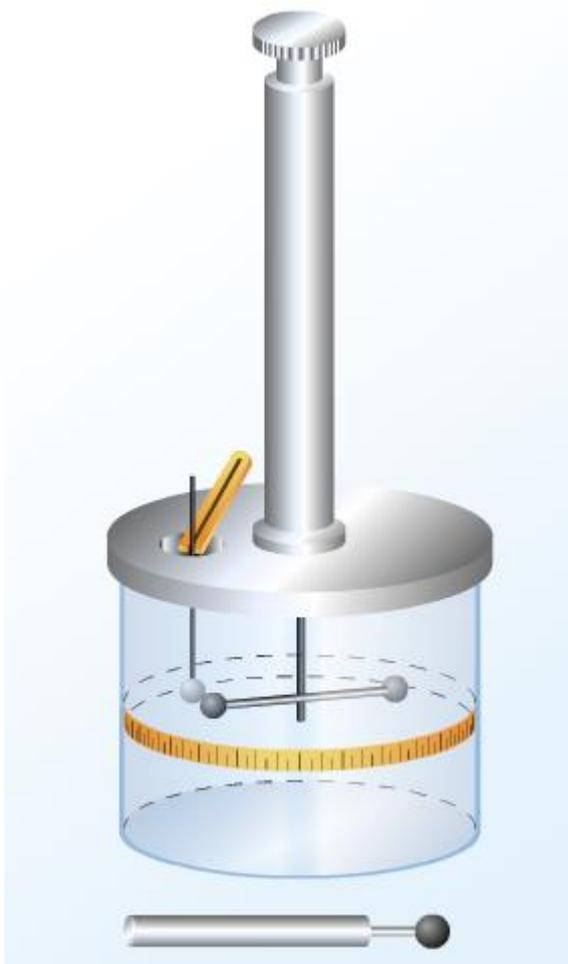
# Закон Кулона

Два неподвижных точечных заряда  $q_1$  и  $q_2$  (заряженных тела, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними), в инерциальной системе отсчета взаимодействуют с силой, прямо пропорциональной величинам зарядов и обратно пропорциональной квадрату расстояния  $r_{12}$  между ними. Сила, с которой заряд  $q_1$  действует на заряд  $q_2$ :

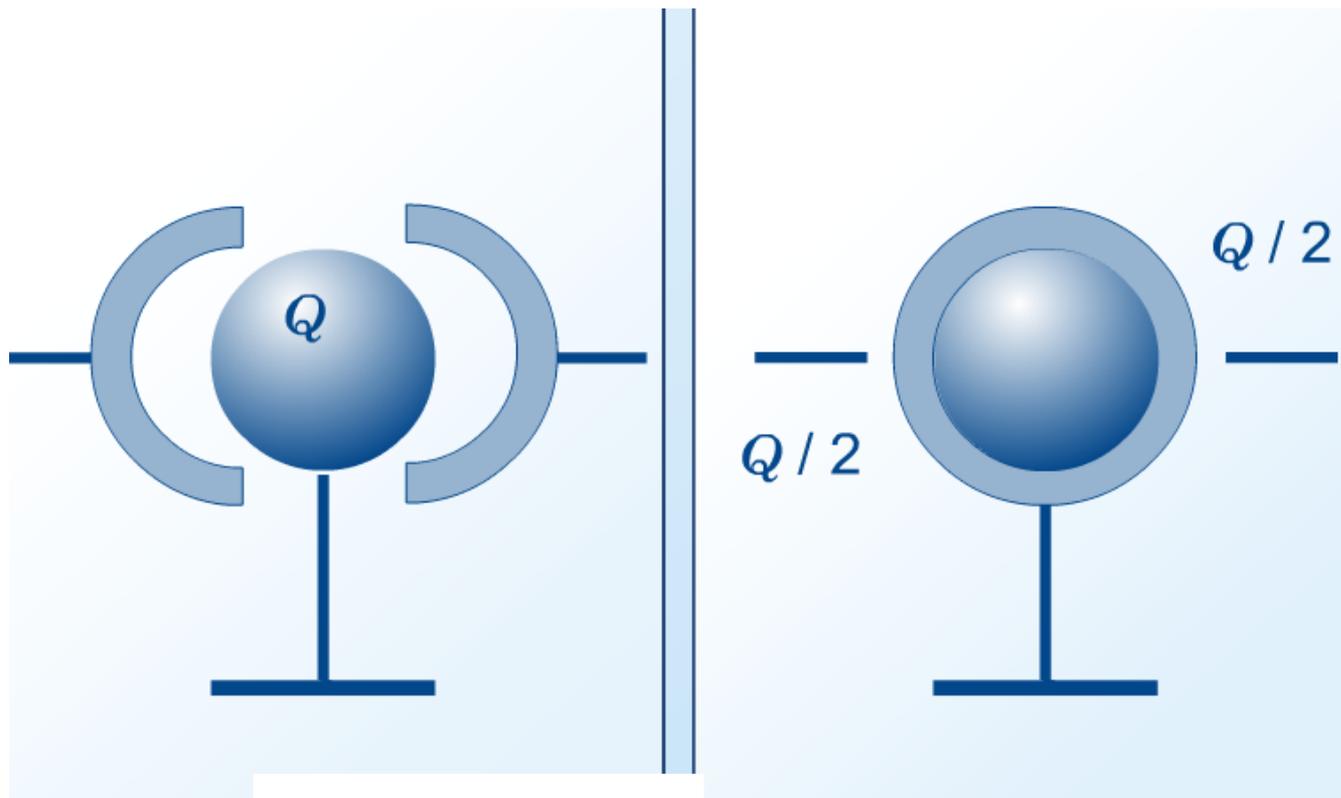
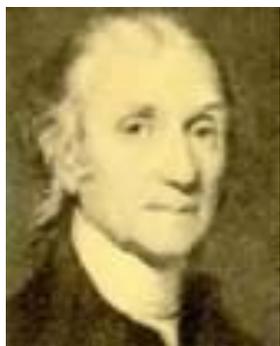
$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12}.$$

Она направлена по прямой, соединяющей заряды, и является силой притяжения для разноименных зарядов и отталкивания для одноименных (вектор  $\bar{\mathbf{r}}_{12}$  направлен от заряда  $q_1$  в сторону заряда  $q_2$ ). Коэффициент пропорциональности в зависимости от выбора единиц измерения.

В СИ  $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н}\cdot\text{м}^2/\text{Кл}^2$ ,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/(\text{Н}\cdot\text{м}^2)$ .



$$\mathbf{F} \propto \frac{\mathbf{r}}{r^{3+\alpha}}$$



Генри Кавендиш

$$|\alpha| \leq 0.02$$

$$|\alpha| \leq |2,7 \pm 3,1| \cdot 10^{-16} \quad (1971)$$

$$10^{-7} \text{ м} < r < 10^7 \text{ м}$$

# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАРЯДА



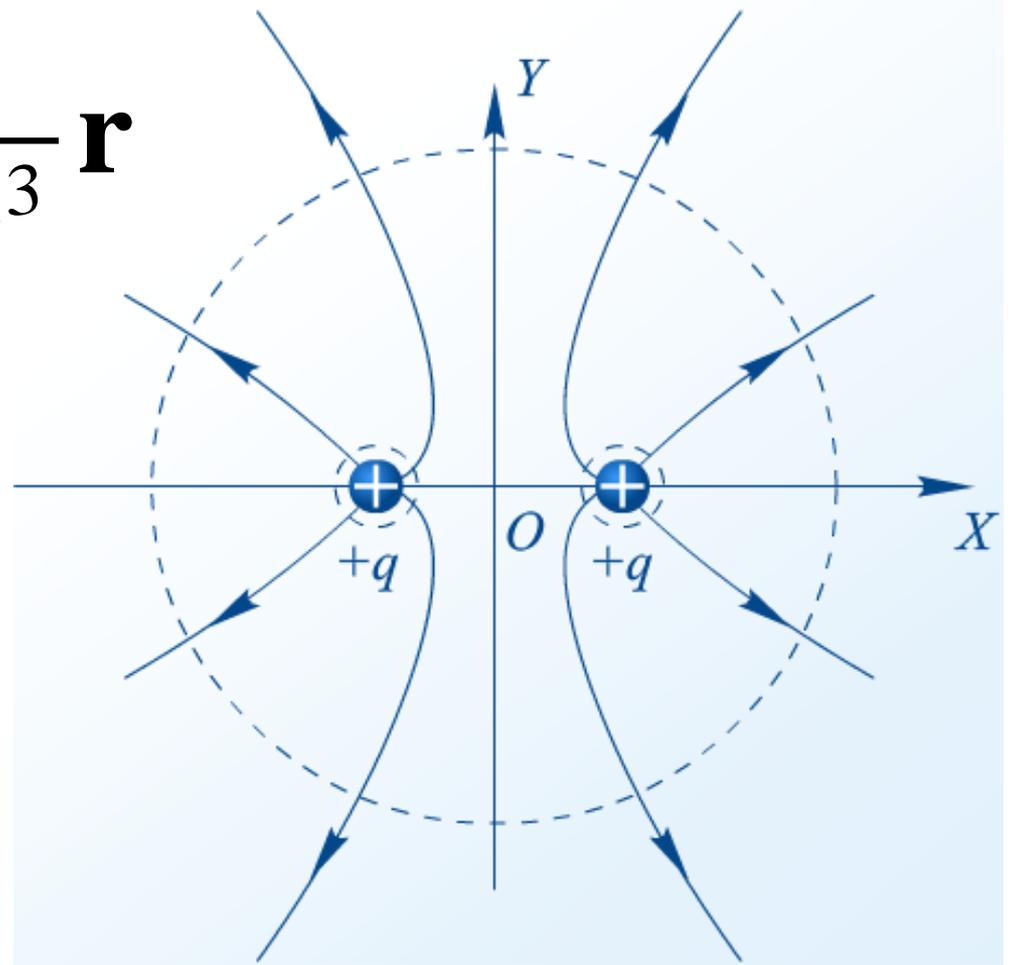
# Принцип суперпозиции

1. Сила взаимодействия двух точечных зарядов не меняется в присутствии третьего.
2. Сила, действующая на точечный заряд со стороны двух точечных зарядов, равна сумме сил, действующих на него со стороны каждого из точечных зарядов.

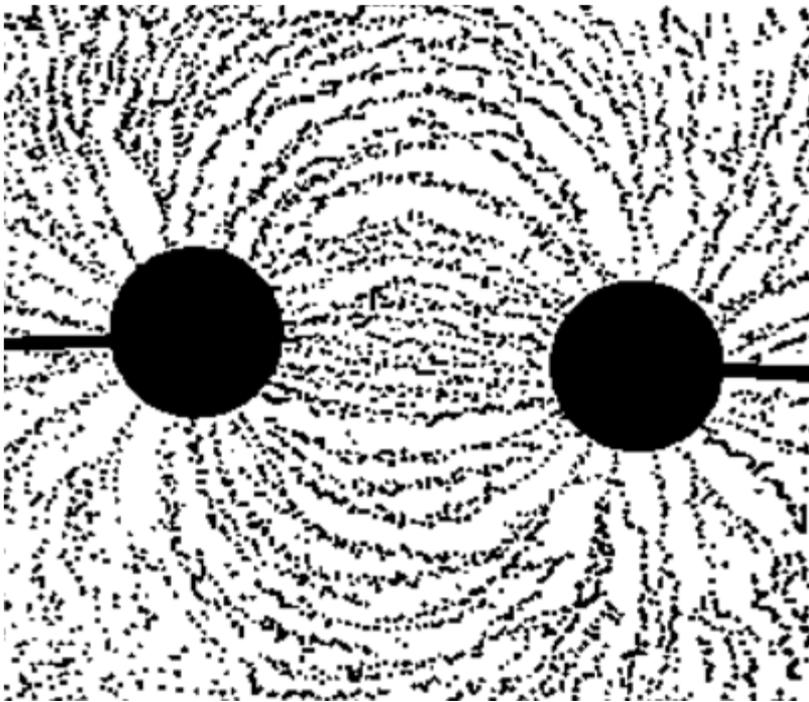
# Напряженность электрического поля

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}$$

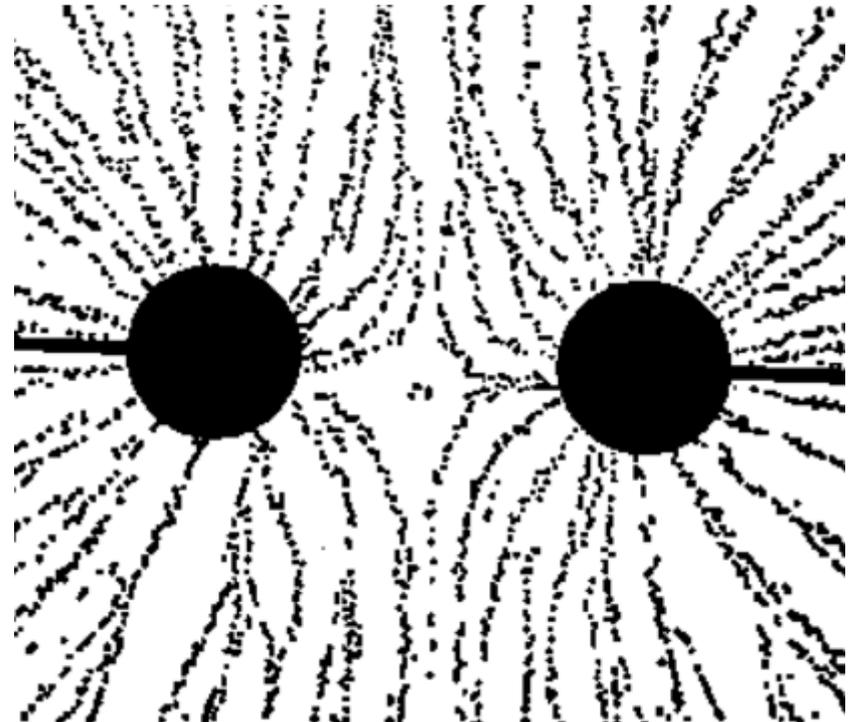
$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}$$



Разноименные  
заряды



Одноименные  
заряды



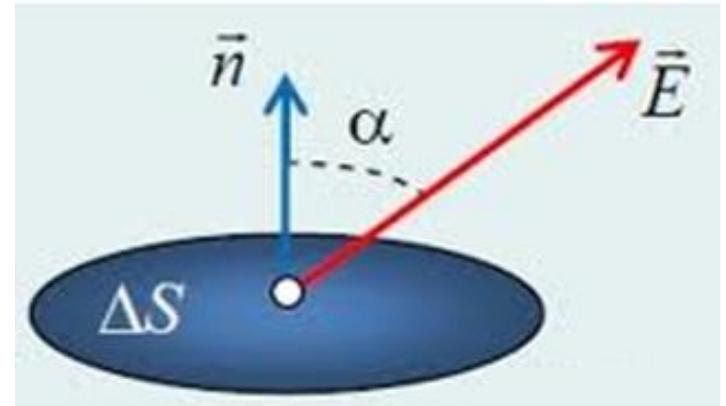
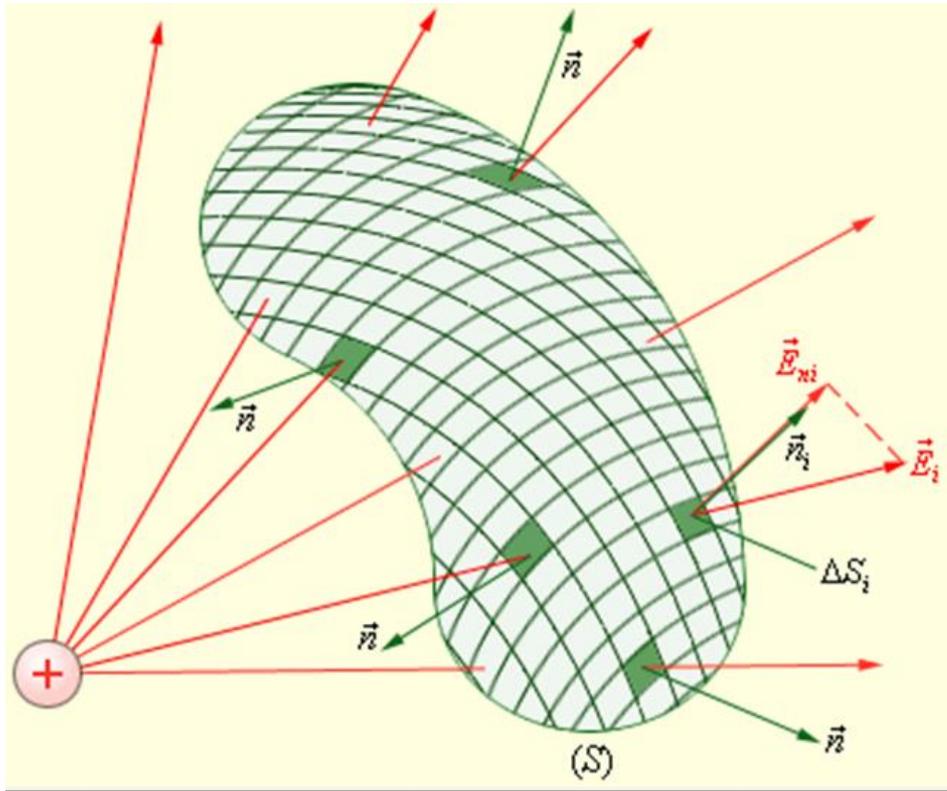
Использование принципа суперпозиции для нахождения напряженности электрического поля

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$$

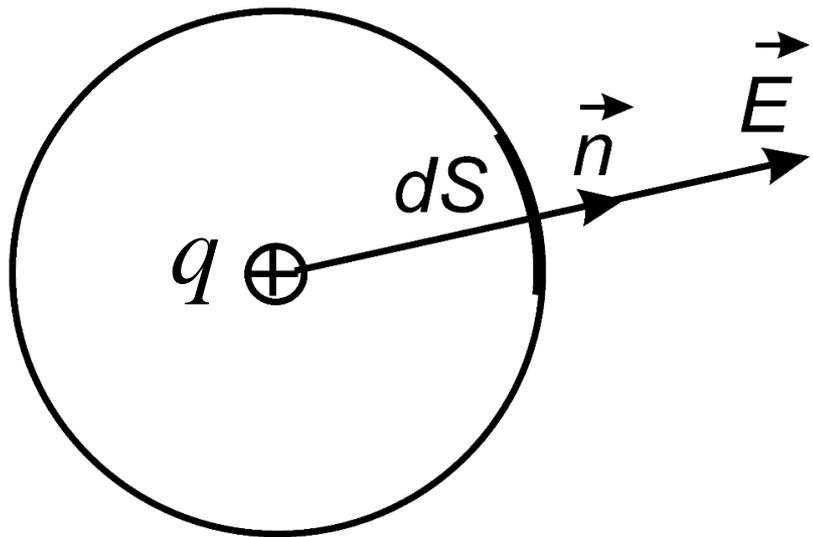
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}') ds'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

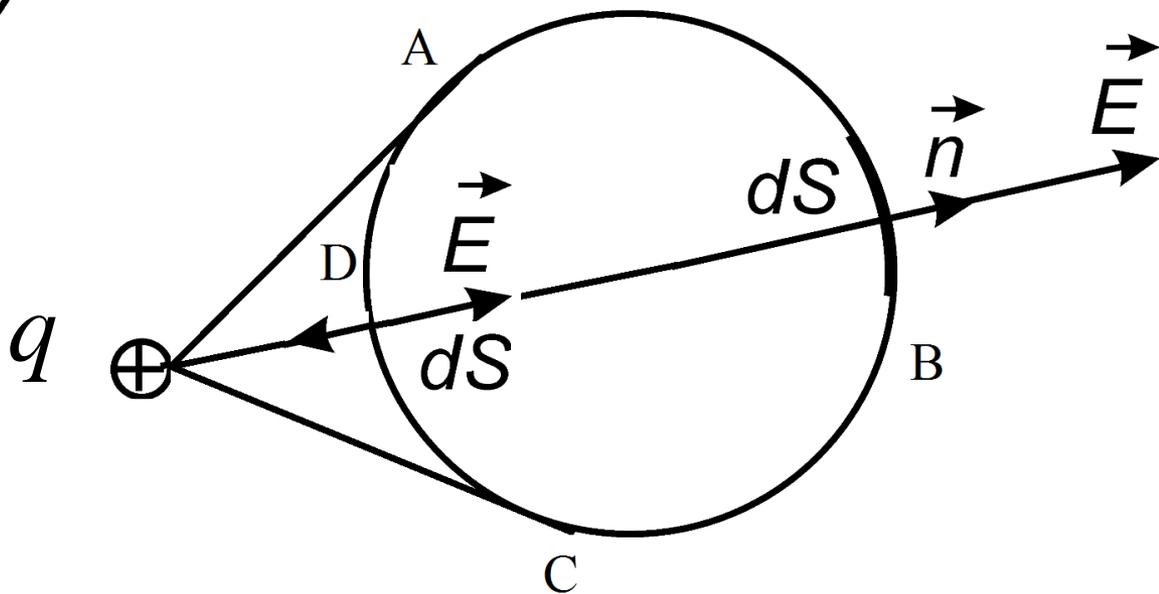
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\gamma(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dl'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$



$$\int_{S_0} \mathbf{E} ds = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_0} \frac{\mathbf{r} ds}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_0} \frac{ds'}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_0} d\Omega$$



$$\oint_{S_0} \mathbf{E} d\mathbf{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_0} d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}$$



$$\oint_{S_0} \mathbf{E} d\mathbf{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \int_{ABC} d\Omega - \int_{ADC} d\Omega \right) = 0$$

$$\oint_{S_0} \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i d\mathbf{s} = \oint_{S_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^3} \mathbf{r}_i d\mathbf{s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \oint_{S_0} \frac{\mathbf{r}_i d\mathbf{s}}{r_i^3} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \oint_{S_0} d\Omega_i = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i$$

## Теорема Гаусса



$$\oint_{S_0} \mathbf{E} d\mathbf{s} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x, y, z)$$

**Поток векторного поля**  $\Phi = \iint_S \vec{a} d\vec{S} = \iint_S (\vec{a}, \vec{n}) dS =$   
 $= \iint_S a_x dydz + a_y dxdz + a_z dxdy = \iint_S (a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma) dS$

**Поток векторного поля**  $\Phi = \iint_S \vec{a} d\vec{S} = \iint_S (\vec{a}, \vec{n}) dS =$   
 $= \iint_S a_\rho \rho d\varphi dz + a_\varphi d\rho dz + a_z \rho d\rho d\varphi$

**Поток векторного поля**  $\Phi = \iint_S \vec{a} d\vec{S} = \iint_S (\vec{a}, \vec{n}) dS =$   
 $= \iint_S r^2 a_r \sin \vartheta d\varphi d\vartheta + r a_\varphi dr d\vartheta + r \sin \vartheta a_\vartheta dr d\varphi$

# Дивергенция векторного поля

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\vec{a} = a_\rho \vec{e}_\rho + a_\varphi \vec{e}_\varphi + a_z \vec{e}_z$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho a_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\varphi \vec{e}_\varphi + a_\vartheta \vec{e}_\vartheta ;$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (a_\vartheta \sin \vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

Сила называется потенциальной, если ее работа вдоль любой замкнутой траектории равна нулю. Кулоновские силы удовлетворяют этому условию

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad } \varphi(\mathbf{r})$$

$$\Delta A = a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

$$\Delta A = a_\rho d\rho + \rho a_\varphi d\varphi + a_z dz$$

$$\Delta A = a_r dr + a_\varphi r \sin \vartheta d\varphi + r a_\vartheta d\vartheta$$

# Ротор векторного поля

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z \quad \text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} = a_\rho \vec{e}_\rho + a_\varphi \vec{e}_\varphi + a_z \vec{e}_z \quad \text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{\rho} \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_\rho & \rho a_\varphi & a_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\varphi \vec{e}_\varphi + a_\vartheta \vec{e}_\vartheta ; \quad \text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \vec{e}_r & \frac{1}{r \sin \vartheta} \vec{e}_\vartheta & \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ a_r & r a_\vartheta & r \sin \vartheta a_\varphi \end{vmatrix}$$

## Градиент скалярного поля

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{k}$$

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \bar{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \bar{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{e}_z$$

$$\bar{e}_\rho = \cos \varphi \bar{i} + \sin \varphi \bar{j}, \quad \bar{e}_\varphi = -\sin \varphi \bar{i} + \cos \varphi \bar{j}, \quad \bar{e}_z = \bar{k}$$

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial r} \bar{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \bar{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \bar{e}_\varphi$$

$$\bar{e}_r = \cos \varphi \sin \vartheta \bar{i} + \sin \varphi \sin \vartheta \bar{j} + \cos \vartheta \bar{k},$$

$$\bar{e}_\vartheta = \cos \varphi \cos \vartheta \bar{i} + \sin \varphi \cos \vartheta \bar{j} - \sin \vartheta \bar{k}, \quad \bar{e}_\varphi = -\sin \varphi \bar{i} + \cos \varphi \bar{j}$$

$$\text{rot}(\alpha \mathbf{a}) = \alpha \text{rot } \mathbf{a} + [\text{grad } \alpha \times \mathbf{a}]$$

$$\begin{aligned} [\text{rot}(\alpha \mathbf{a})]_x &= \underline{\partial_y (\alpha a_z)} - \partial_z (\alpha a_y) = \\ &= \underline{\alpha \partial_y a_z} - \alpha \partial_z a_y + \underline{a_z \partial_y \alpha} - a_y \partial_z \alpha = \\ &= \alpha (\partial_y a_z - \partial_z a_y) + [\text{grad } \alpha \times \mathbf{a}]_x = \\ &= \alpha [\text{rot } \mathbf{a}]_x + [\text{grad } \alpha \times \mathbf{a}]_x \end{aligned}$$

$$\mathbf{E} = \frac{q \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = \text{rot} \frac{q \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \underbrace{\frac{1}{r^3} \text{rot } \mathbf{r}}_{=0} + [\text{grad} \left( \underbrace{\frac{1}{r^3}}_{=0} \right) \times \mathbf{r}] \right\} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \operatorname{rot} \mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \operatorname{rot} \frac{q_i \mathbf{r}_i}{r_i^3} = 0$$

$$\mathbf{E}_i = \frac{q_i \mathbf{r}_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^3} = -\operatorname{grad} \left( \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \right) = -\operatorname{grad} \varphi_i \quad \varphi_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i = -\sum_{i=1}^n \operatorname{grad} \varphi_i = -\operatorname{grad} \sum_{i=1}^n \varphi_i =$$

$$= -\operatorname{grad} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} = -\operatorname{grad} \varphi$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

Использование принципа суперпозиции для нахождения напряженности электрического поля

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}') ds'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\gamma(\mathbf{r}') dl'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Потенциал - работа по перемещению единичного заряда на бесконечно большое расстояние



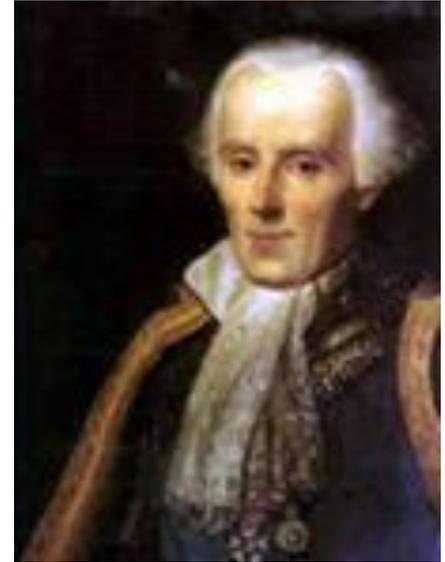
$$\varphi = q_2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 x^2} dx = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_0} = q_2 \varphi_{12}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\Delta \varphi = \rho(\mathbf{r}) / \epsilon_0$$

$$\Delta \varphi = -\rho(\mathbf{r}) / \epsilon_0$$

## Уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$$



## Уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = 0$$



# Оператор Лапласа

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\Delta f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$$

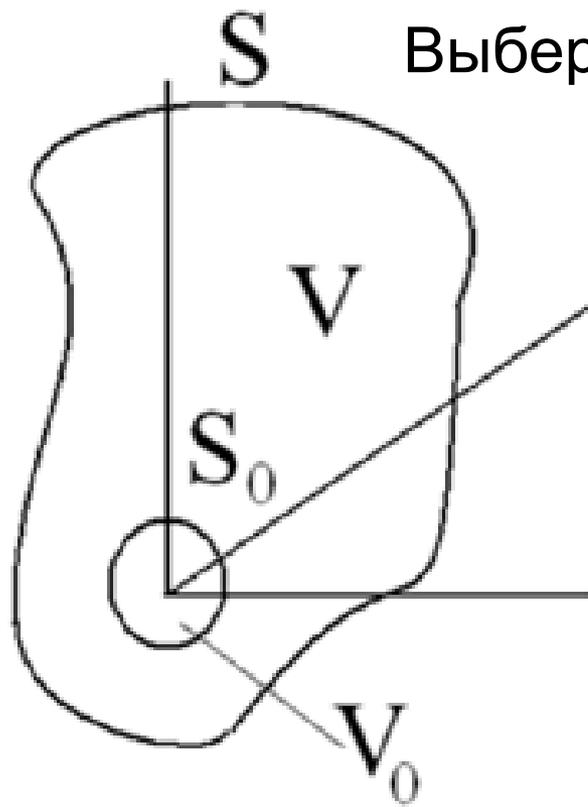
Решение уравнения

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Найдем потенциал в произвольной точке, приняв ее за начало координат



$$\int_{V-V_0} (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) dV = \oint_{S+S_0} \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS$$



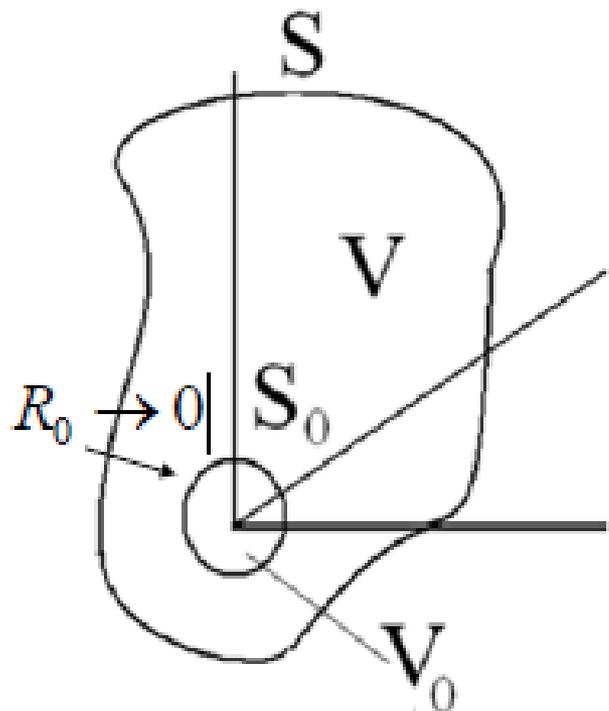
Выберем  $\psi = \frac{1}{r'} \Rightarrow \Delta \psi = 0$

$$\Delta \varphi = -\rho / \epsilon_0$$



$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{V-V_0} \frac{\rho}{r'} dV =$$

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{S+S_0} \left( \frac{1}{r'} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r'} \right) \right) dS$$



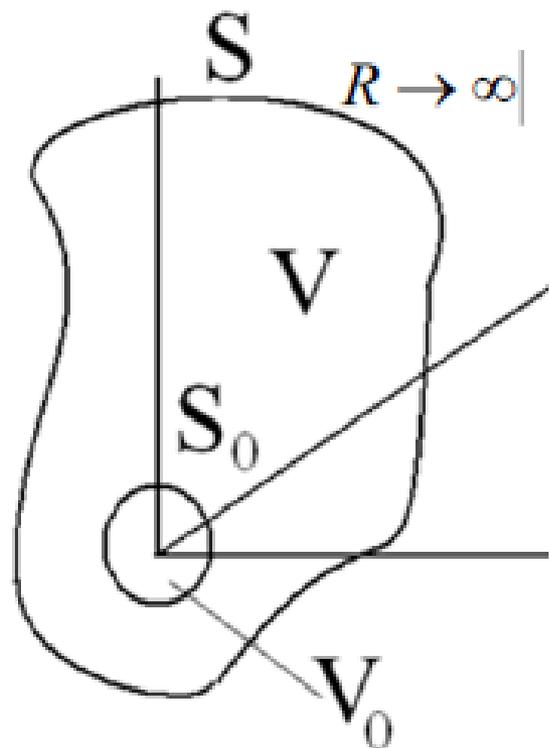
$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{r'} dv + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} \frac{\rho}{r'} dv = \\
 & = \frac{1}{4\pi} \int_S \left( \frac{1}{r'} \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r'} \right) \right) dS + \\
 & + \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left( \frac{1}{r'} \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r'} \right) \right) dS
 \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r'} \right) \right|_{R_0} = \left[ -\frac{\partial}{\partial r'} \left( \frac{1}{r'} \right) \right]_{r'=R_0} = \frac{1}{R_0^2} \quad R_0 \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left( \frac{1}{r'} \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r'} \right) \right) dS = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left( \frac{\phi}{R_0^2} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial\phi}{\partial r'} \right) dS =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{\tilde{\phi}}{R_0^2} + \frac{1}{R_0} \left( \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial r'} \right) \right) \int_{S_0} dS = -\tilde{\phi} + R_0 \left( \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial r'} \right) \Rightarrow -\phi(0)$$

$R_0 \rightarrow 0$



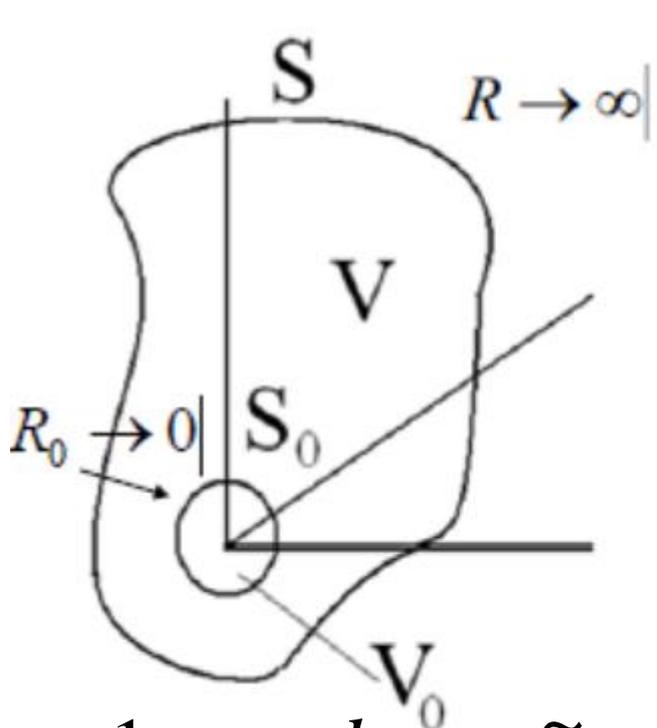
$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_V \frac{\rho}{r'} dv + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{V_0} \frac{\rho}{r'} dv = \\
 & = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left( \frac{1}{r'} \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r'} \right) \right) dS + \\
 & \quad \frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} \left( \frac{1}{r'} \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r'} \right) \right) dS
 \end{aligned}$$

$$R \rightarrow \infty \Rightarrow \phi \propto C_1 / R, \quad \partial\phi / \partial R \propto C_2 / R^2$$

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{S \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{r'} \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r'} \right) \right) dS = \frac{1}{4\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{C_2}{R^3} + \frac{C_1}{R} \frac{1}{R^2} \right) \oint_{S \rightarrow \infty} dS =$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{C_2}{R} + \frac{C_1}{R} \right) = 0$$

$\swarrow$   
 $R \rightarrow \infty$



$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_V \frac{\rho}{r'} dv + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{V_0} \frac{\rho}{r'} dv = \\
 & = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left( \frac{1}{r'} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r'} \right) \right) dS + \\
 & + \frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} \left( \frac{1}{r'} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r'} \right) \right) dS
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{V_0} \frac{\rho dv}{r'} = \frac{\tilde{\rho}}{4\pi\epsilon_0} \oint_{V_0} \frac{r'^2 \sin \theta dr' d\theta d\tilde{\varphi}}{r'} = \frac{\rho R_0^2}{2\epsilon_0} \rightarrow 0$$

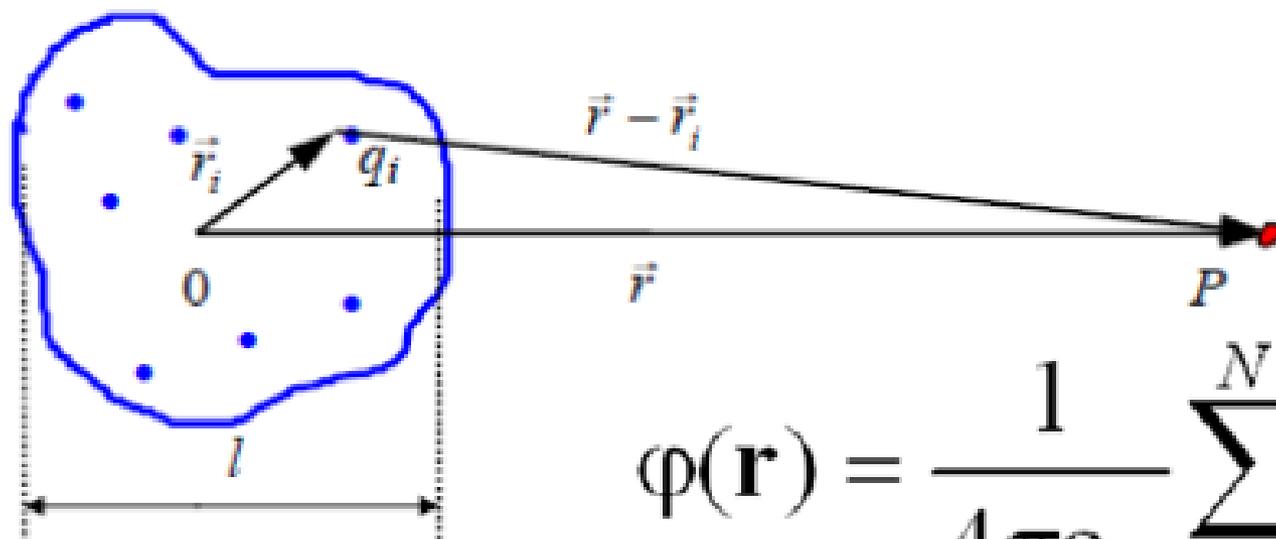
$(R_0 \rightarrow 0)$

$$- \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_V \frac{\rho}{r'} dv = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\rho}{r'} dv$$

Объединяя полученные выражения, получаем

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

- решение уравнения  $\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$



$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots$$

$$\begin{aligned}
\varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|r - r_i|} = \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \left\{ \frac{1}{r} - \sum_{\alpha=1}^3 x_{i\alpha} \left[ \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{1}{r} \right) \right]_{r_i=0} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^3 x_{i\alpha} x_{i\beta} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left( \frac{1}{r} \right) \right]_{r_i=0} + \dots \right\} = \\
&= \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots
\end{aligned}$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r}$$

$$\varphi_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^3 q_i x_{i\alpha} \left[ \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{1}{r} \right) \right]_{r_i=0}$$

Нейтральная система  $\varphi_0 = 0$

$$\varphi_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^3 q_i x_{i\alpha} \left[ \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{1}{r} \right) \right]_{r_i=0} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^3 q_i x_{i\alpha} \left[ \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{1}{r} \right) \right]_{r_i=0} = \begin{aligned} &x_1 = x \\ &x_2 = y \\ &x_3 = z \end{aligned} \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{i=1}^n q_i x_{i\alpha} \left[ \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{1}{r} \right) \right]_{r_i=0} = \begin{aligned} &x_{i1} = x_i \\ &x_{i2} = y_i \\ &x_{i3} = z_i \end{aligned} \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha=1}^3 d_\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{1}{r} \right) \right]_{r_i=0} = \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \mathbf{d} \cdot \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) \right) = \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}
\end{aligned}$$

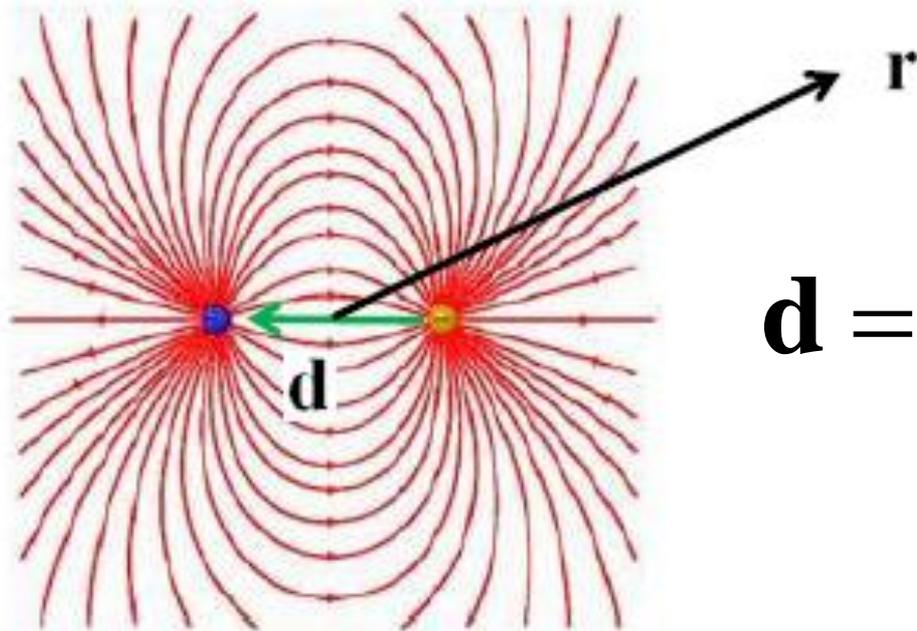
$$d_\alpha = \sum_{i=1}^n q_i x_{i\alpha}$$

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}_i$$

Дипольный момент

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= -\text{grad } \varphi_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{grad} \left( \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) = \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r^3} \text{grad}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}) + (\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}) \text{grad} \left( \frac{1}{r^3} \right) \right) = \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r^3} \mathbf{d} - \frac{3\mathbf{r}}{r^5} (\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}) \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{d}r^2}{r^5} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n &= 2 \\
 \mathbf{d} &= q\mathbf{l}
 \end{aligned}$$



$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}_i$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\mathbf{r}(d\mathbf{r}) - d\mathbf{r}^2}{r^5} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\mathbf{r}d \cos \theta - d\mathbf{r}}{r^4}$$

$$\mathbf{d} = \{\cos \theta, -\sin \theta, 0\}$$

$$\mathbf{r} = \{r, 0, 0\}$$

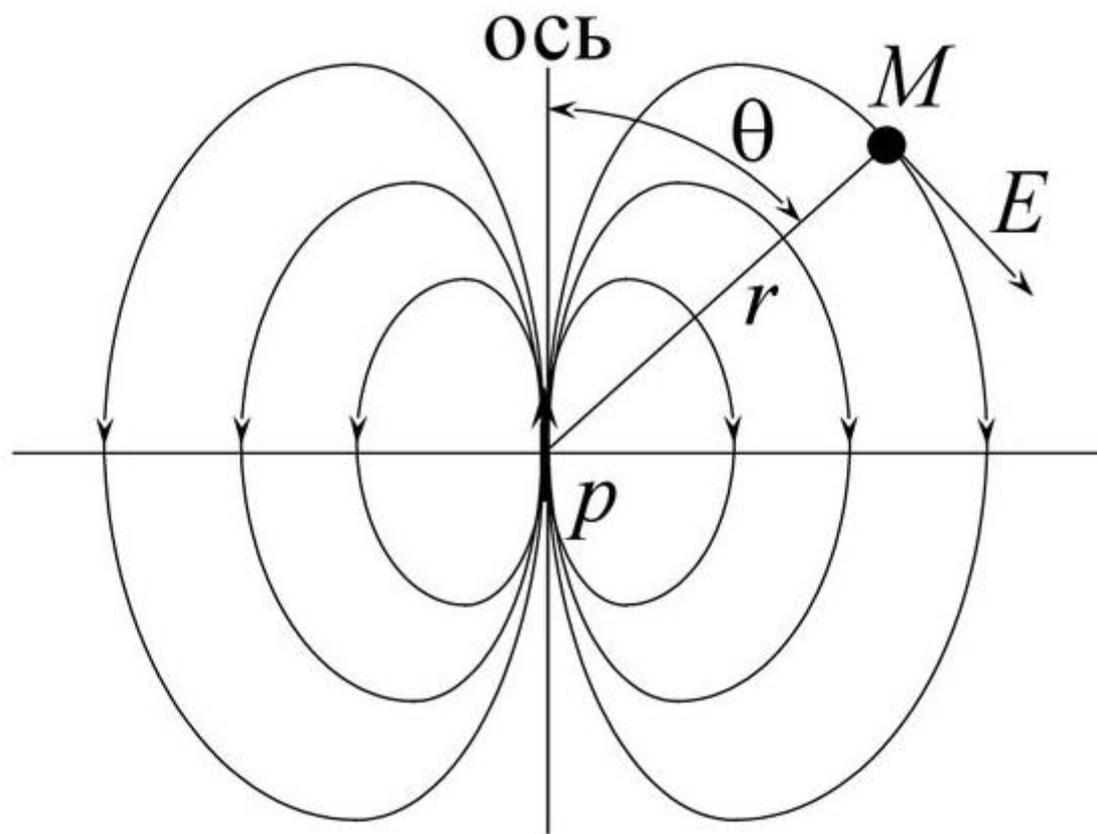
$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3rd \cos \theta - rd \cos \theta}{r^4} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2d \cos \theta}{r^3}$$

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \sin \theta}{r^3}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \theta}$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2}$$

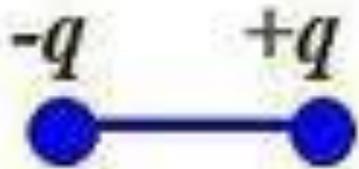
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}$$



$$\mathbf{p} = q\mathbf{l}$$

$$Q_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^n q_i x_{i\alpha} x_{i\beta} \quad \varphi_2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^3 Q_{\alpha\beta} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left( \frac{1}{r} \right) \right]_{\mathbf{r}_i=0}$$

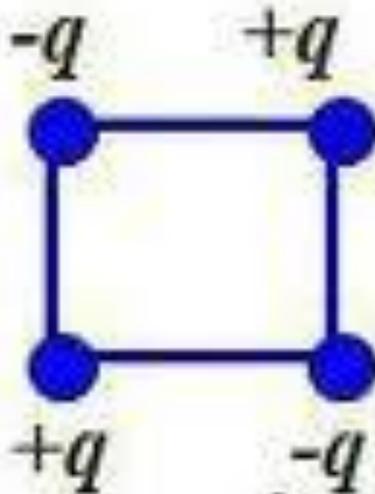
ДИПОЛЬ



$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}_i$$

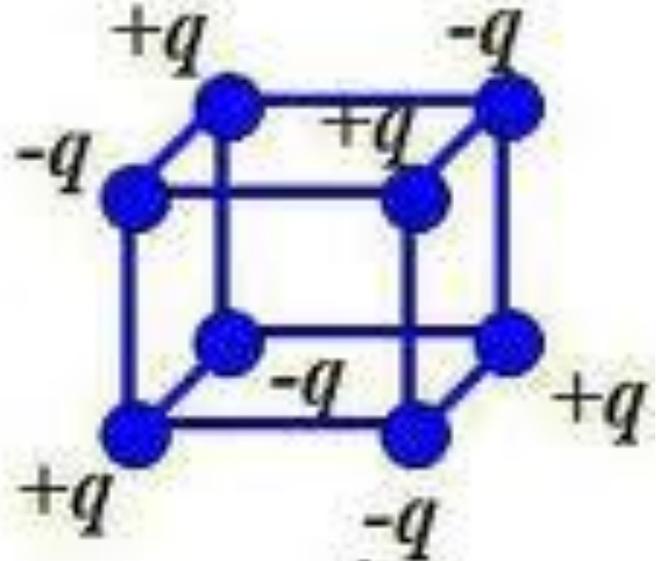
$$E \sim \frac{1}{r^3}$$

КВАДРУПОЛЬ



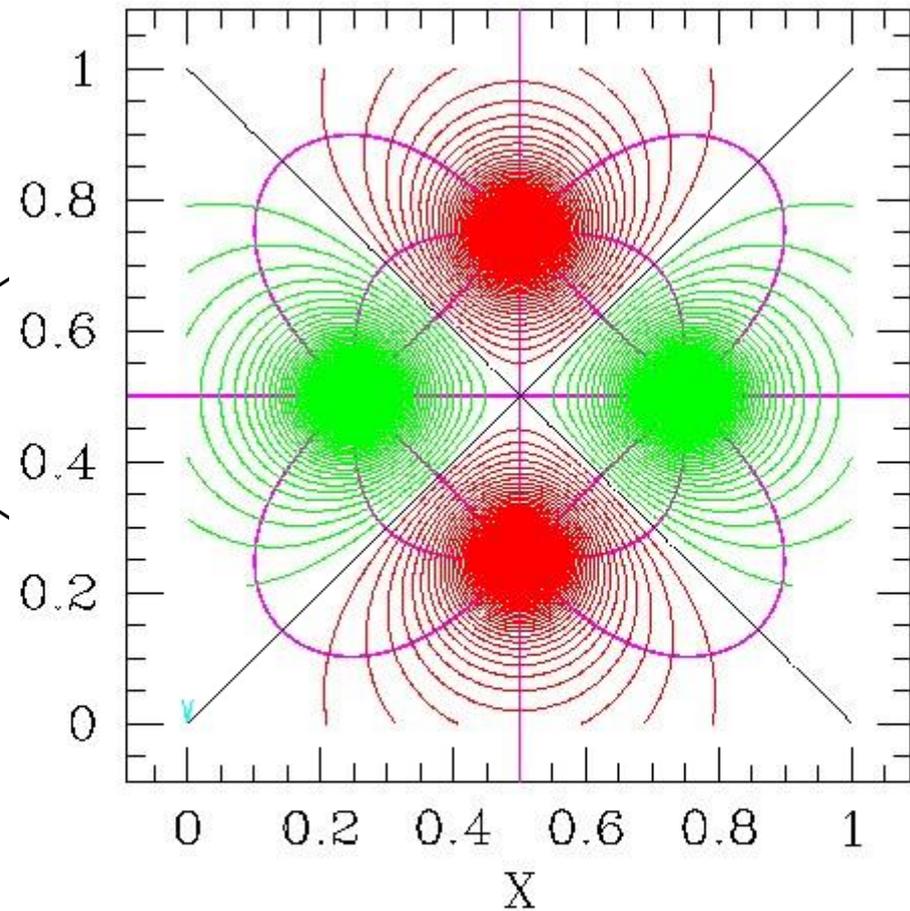
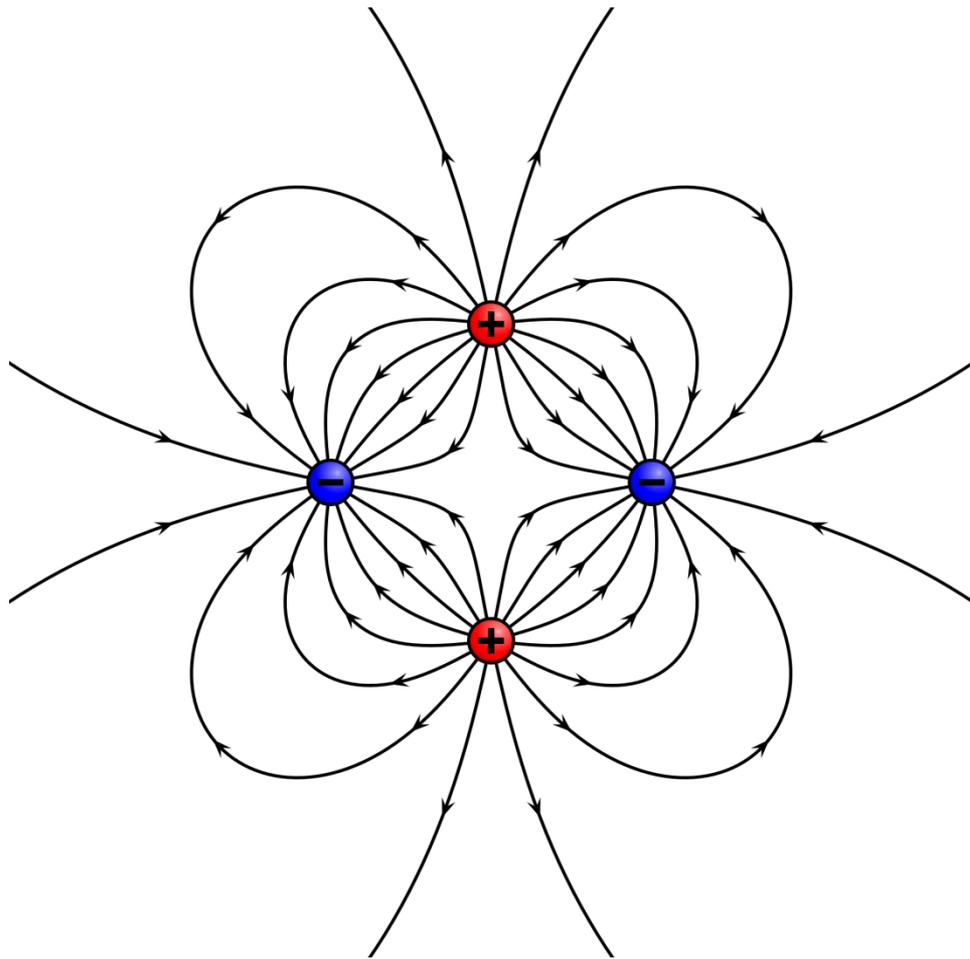
$$E \sim \frac{1}{r^4}$$

ОКТУПОЛЬ



$$E \sim \frac{1}{r^5}$$

# Электрическое поле квадрупольа



# Энергия взаимодействия двух точечных зарядов

$$W' = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} = \frac{1}{2} (q_1 \varphi'_1 + q_2 \varphi'_2)$$

## Энергия заряда

$$W'' = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \Delta q_i \varphi'_i = \frac{1}{2} q \varphi_{\text{соб}}$$

## Энергия системы зарядов

$$W = W' + W'' = \frac{1}{2} \oint \rho(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{a} dv = \oint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\mathbf{a} = \varphi \operatorname{grad} \varphi \quad \Delta \varphi = -\rho / \epsilon_0$$

$$\mathbf{b} = \operatorname{grad} \varphi \quad \operatorname{div} \alpha \mathbf{b} = \alpha \operatorname{div} \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \operatorname{grad} \alpha$$

$$\alpha = \varphi$$

$$\int_V [\varphi \Delta \varphi + (\nabla \varphi)(\nabla \varphi)] dv = \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds$$

$$\int_V \left( -\varphi \frac{\rho}{\epsilon_0} + E^2 \right) dv = \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds$$

$$W = \frac{1}{2} \oint \rho(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{\epsilon_0}{2} \oint E^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow 0 \\ &npu \\ &V \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$\varphi \sim \frac{1}{r}$$

# Энергия системы во внешнем поле

$$U = \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i = \sum_{i=1}^n q_i (\varphi(0) + r_i (\text{grad } \varphi(0))_i + \dots =$$
$$= Q\varphi(0) - \mathbf{E}(0)\mathbf{d} + \dots$$

$= 0$  Для нейтральной системы

$$\mathbf{F} = -\text{grad}U = \text{grad}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{d})$$

$$\text{grad}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}) = [\mathbf{d} \times \text{rot } \mathbf{E}] + [\mathbf{E} \times \text{rot } \mathbf{d}] +$$
$$= 0 \qquad = 0$$

$$+ (\mathbf{E} \nabla) \mathbf{d} + (\mathbf{d} \nabla) \mathbf{E}$$
$$= 0$$

$$\mathbf{F} = (\mathbf{d} \nabla) \mathbf{E}$$

Поле внутри системы, состоящей из  
очень большого числа зарядов

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_m \mathbf{v} = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_m = \rho_m / \varepsilon_0 \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_m = 0$$

$$\bar{f} = \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{1}{v_0} \int_{v_0} f_m dv dt$$

# Электрическое поле в среде

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \bar{\rho} / \varepsilon_0 \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{E} = \overline{\mathbf{E}}_m \quad \bar{\rho}_m = \bar{\rho} \quad \mathbf{j} = \overline{\rho}_m \mathbf{v}$$

$$\bar{\rho} = \rho_{\text{своб}} + \rho_{\text{связ}}$$

Проводники  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$

$$U = \varphi_2 - \varphi_1 = IR$$

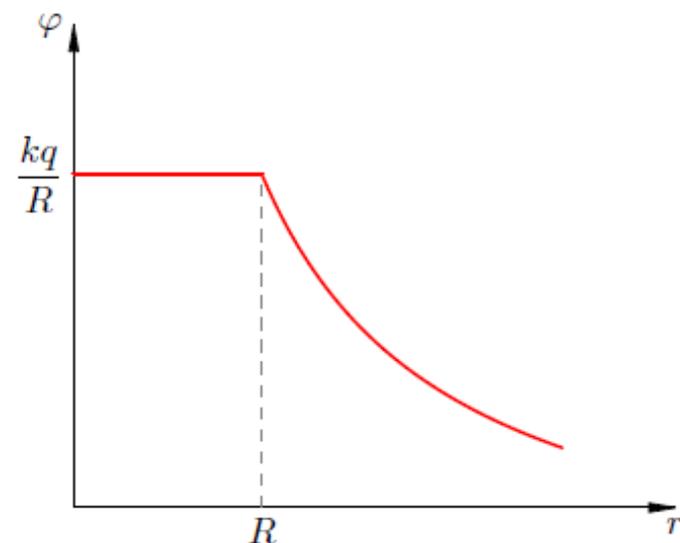
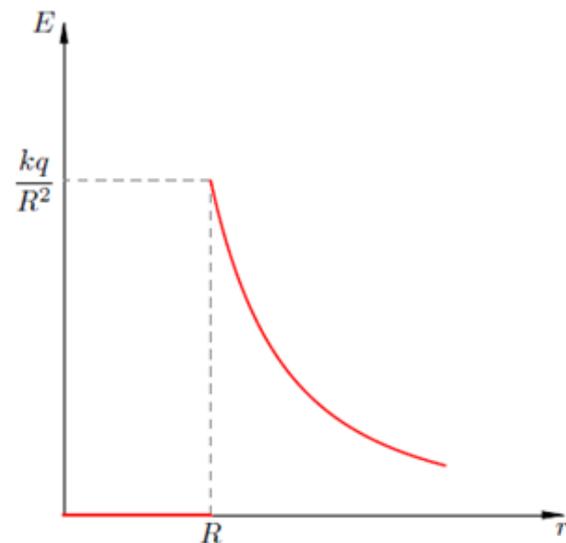
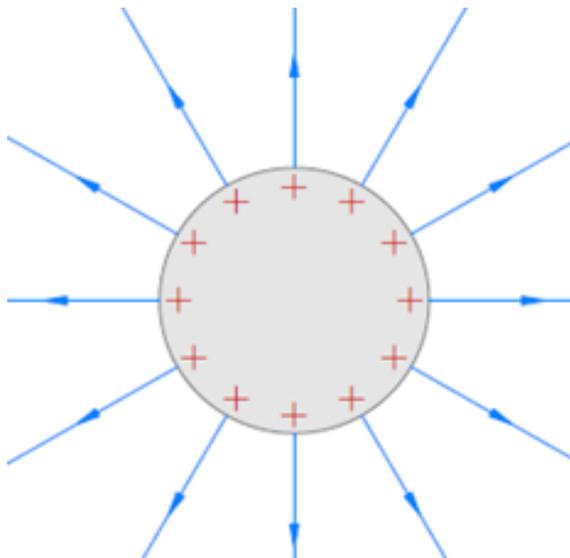


# Электростатическое поле проводников

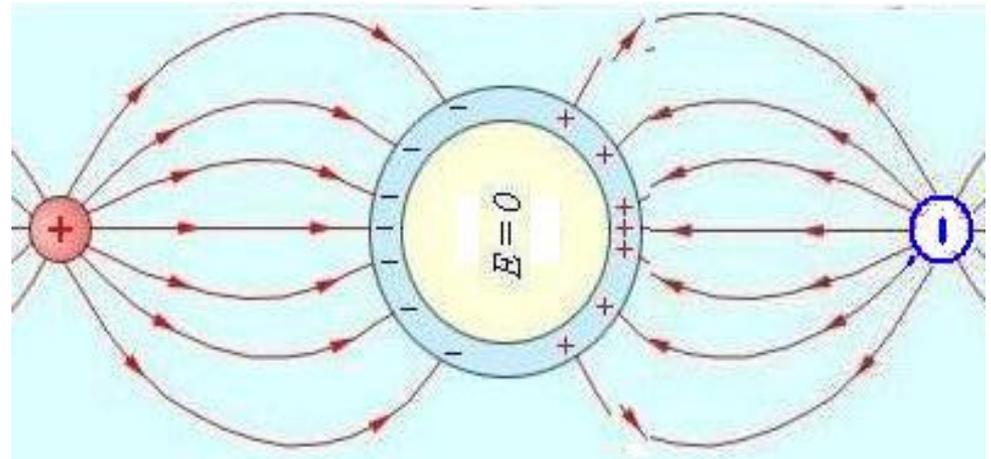
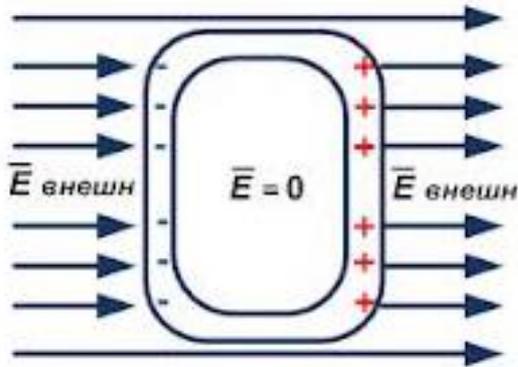
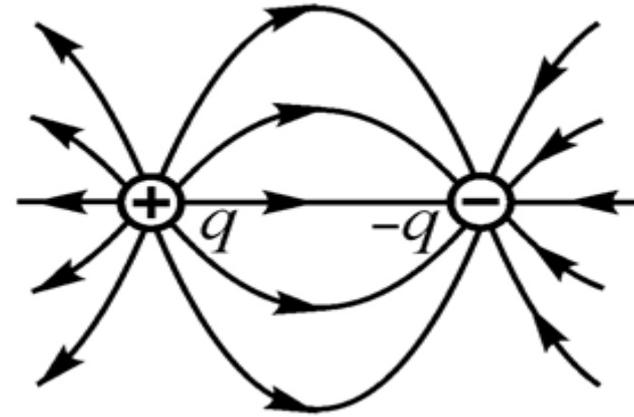
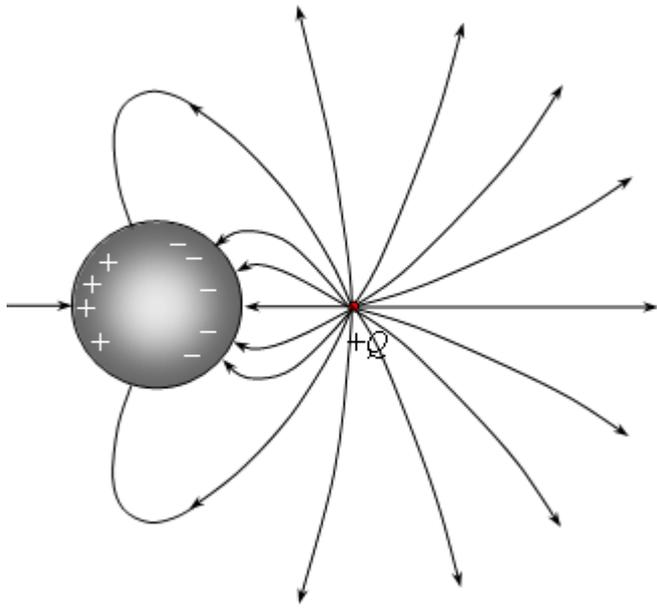
$$\partial \bar{\rho} / \partial t = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0 = \operatorname{div} \sigma \mathbf{E} = \sigma \operatorname{div} \mathbf{E} = (\sigma / \varepsilon_0) \bar{\rho}$$

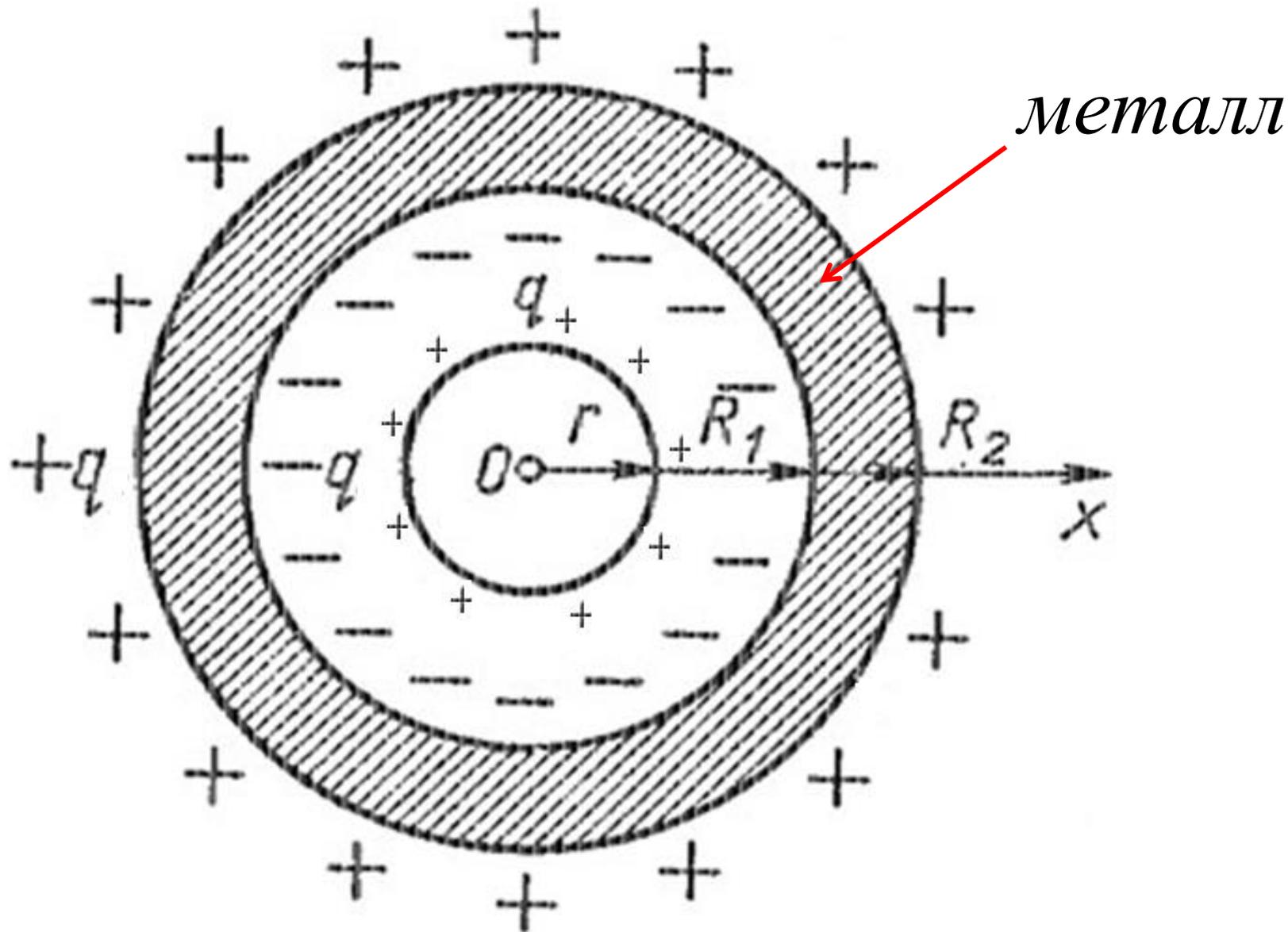
$$\bar{\rho} = 0$$



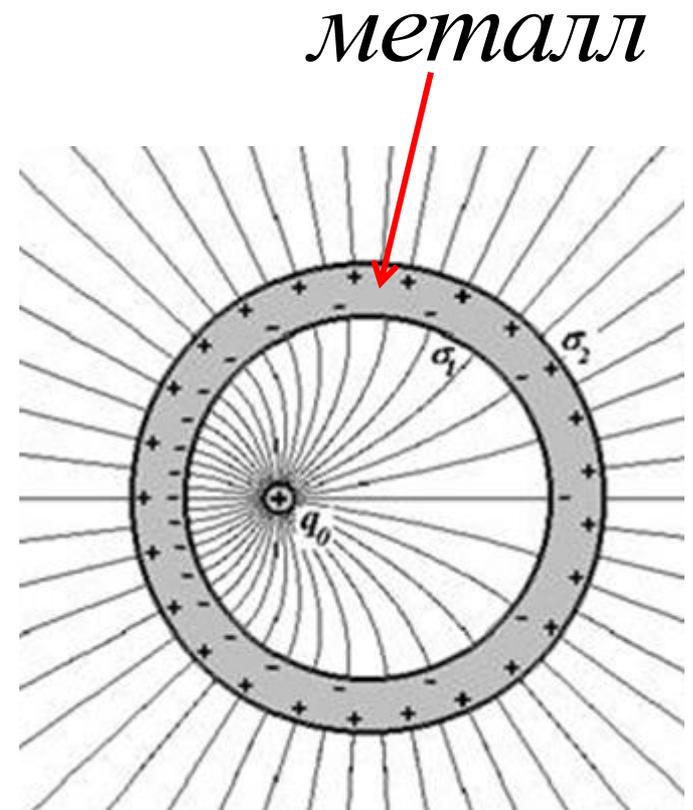
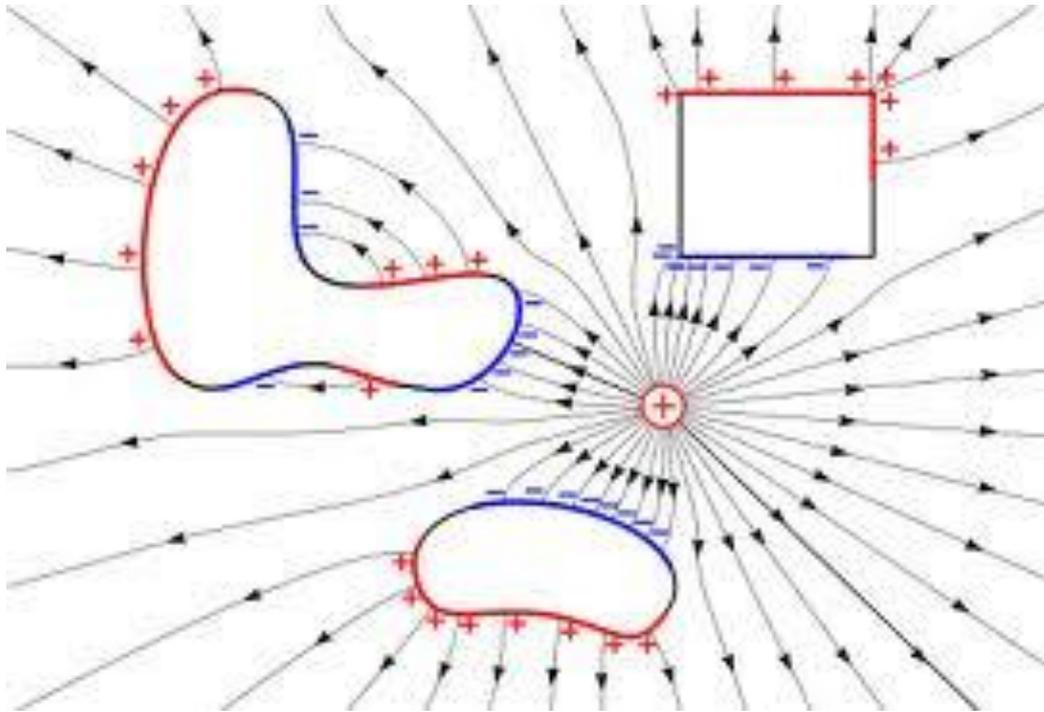
# Проводники в электростатическом поле



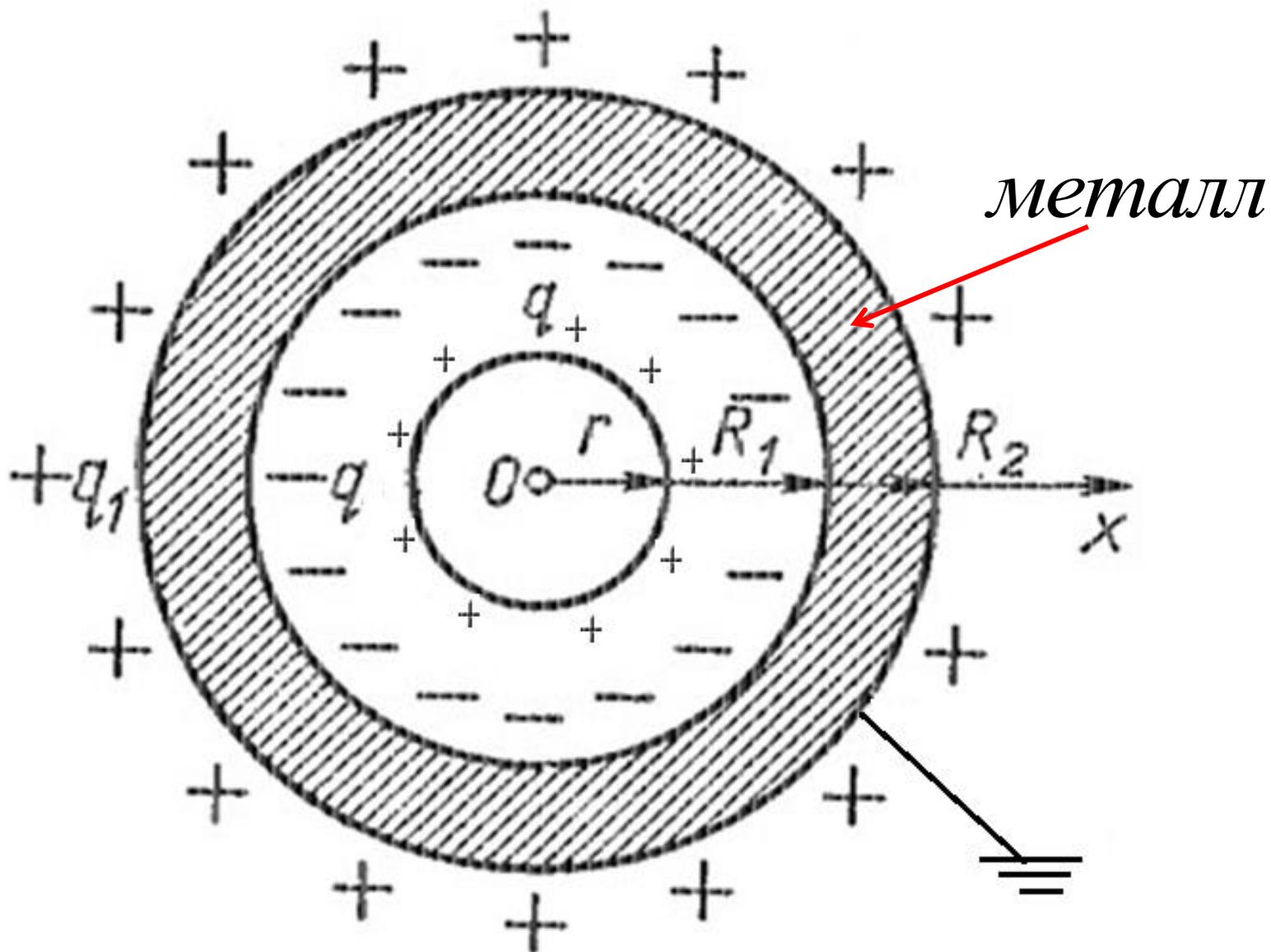
# Проводники в электростатическом поле



# Проводники в электростатическом поле



# Проводники в электростатическом поле



# Надо ли заземлять компьютер?

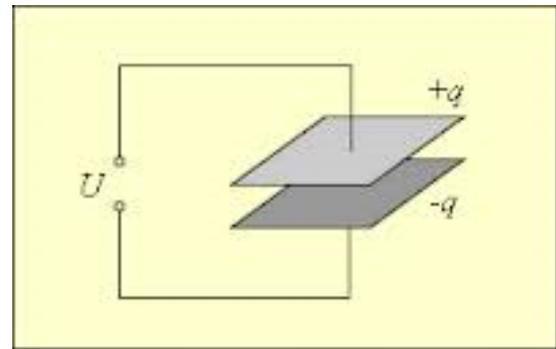


$$\varphi_1 = \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 \quad q_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2$$

$$\varphi_2 = \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 \quad q_2 = C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2$$

$$Q = C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2$$

$$-Q = C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2$$

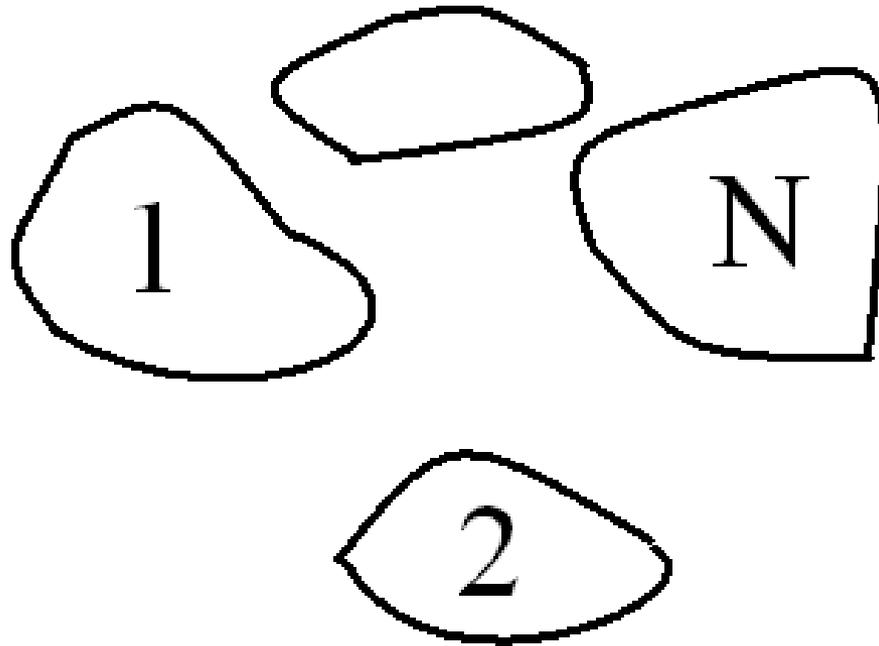


$$\frac{|Q|}{|\varphi_1 - \varphi_2|} = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + C_{22} + 2C_{12}} = C$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N C_{ij} \varphi_i \varphi_j \quad W_{\text{конденсатора}} = \frac{q^2}{2C}$$

## Две задачи электростатики

$$\Delta\varphi = -\rho / \varepsilon_0$$



1. Задан потенциал каждого проводника
2. Задан суммарный заряд каждого проводника

Они имеют единственное решение !!!

Предположим, что существуют два решения  $\varphi_{1,2}$

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \quad \Delta\varphi = 0$$

Нулевые потенциалы проводников

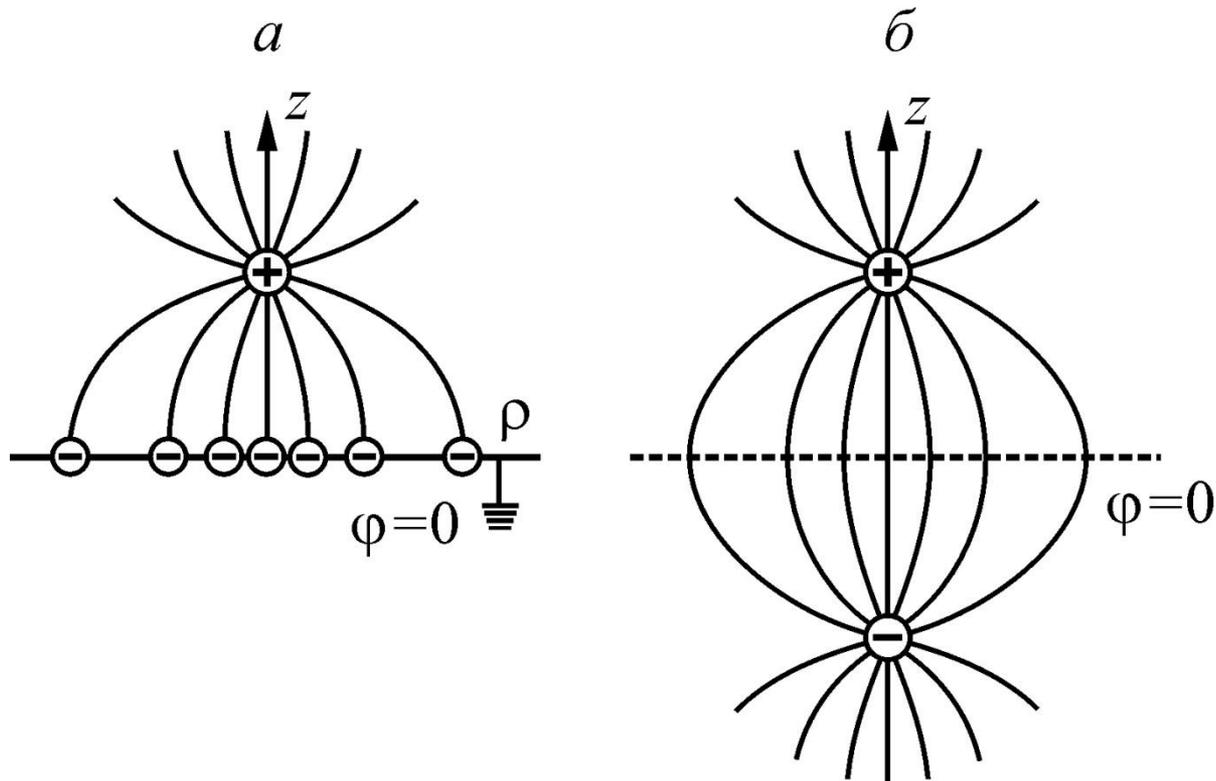
$$\operatorname{div} \alpha \mathbf{b} = \alpha \operatorname{div} \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \operatorname{grad} \alpha$$

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{a} dv = \oint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} \quad \mathbf{a} = \varphi \operatorname{grad} \varphi$$

$$\int_V [\varphi \Delta\varphi + (\nabla\varphi)(\nabla\varphi)] dv = \oint_S \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds$$



$$\int_V (\nabla\varphi)^2 dv = 0 \quad \longrightarrow \quad \varphi = 0$$



$$\Delta\varphi = -q\delta(z - a) / \varepsilon_0 \quad \varphi(x, y, z = 0) = 0$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2}} \right)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{x}{\sqrt{[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^3}} + \frac{x}{\sqrt{[x^2 + y^2 + (z+a)^2]^3}} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{\sqrt{[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^3}} + \frac{1}{\sqrt{[x^2 + y^2 + (z+a)^2]^3}} \right) +$$

$$+ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( +\frac{3x^2}{\sqrt{[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^5}} - \frac{3x^2}{\sqrt{[x^2 + y^2 + (z+a)^2]^5}} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{\sqrt{[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^3}} + \frac{1}{\sqrt{[x^2 + y^2 + (z+a)^2]^3}} \right) +$$

$$+ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( +\frac{3y^2}{\sqrt{[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^5}} - \frac{3y^2}{\sqrt{[x^2 + y^2 + (z+a)^2]^5}} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{\sqrt{[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^3}} + \frac{1}{\sqrt{[x^2 + y^2 + (z+a)^2]^3}} \right) +$$

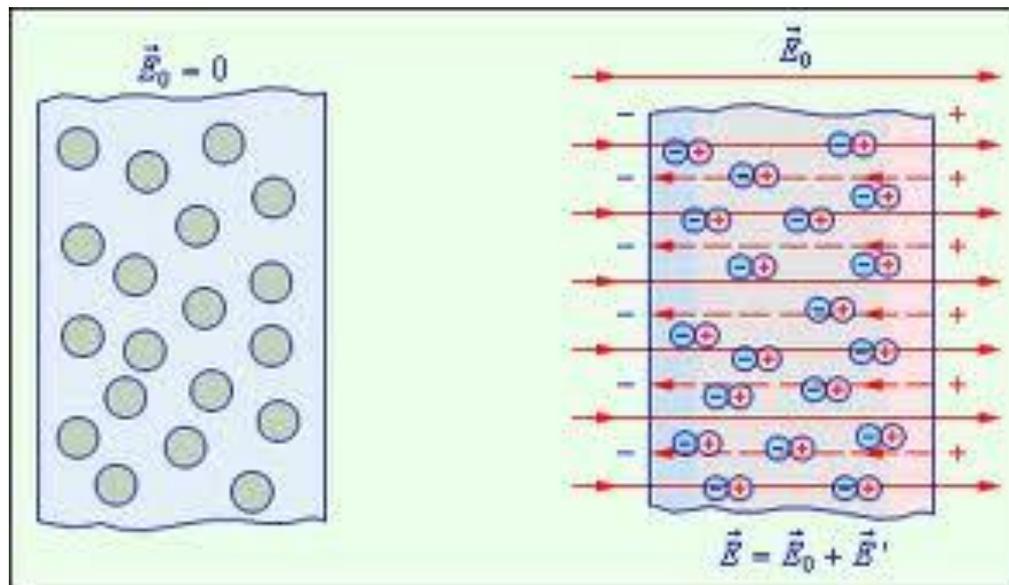
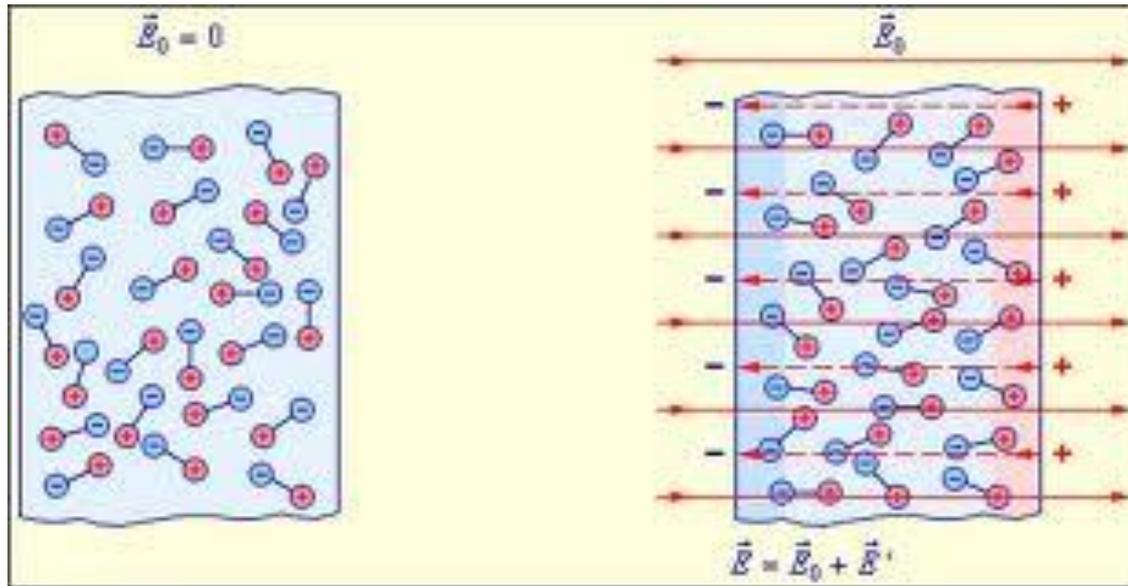
$$+ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( +\frac{3(z-a)^2}{\sqrt{[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^5}} - \frac{3(z+a)^2}{\sqrt{[x^2 + y^2 + (z+a)^2]^5}} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{3}{\sqrt{[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^3}} + \frac{3}{\sqrt{[x^2 + y^2 + (z+a)^2]^3}} \right) +$$

$$+ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( +\frac{3[x^2 + y^2 + (z-a)^2]}{\sqrt{[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^5}} - \frac{3[x^2 + y^2 + (z+a)^2]}{\sqrt{[x^2 + y^2 + (z+a)^2]^5}} \right) = 0$$

# Диэлектрики



# Электрическое поле в диэлектриках

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \bar{\rho} / \varepsilon_0 \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{E} = \overline{\mathbf{E}}_m \quad \bar{\rho} = \rho_{\text{связ}} \quad \mathbf{j} = \overline{\rho_{\text{связ}} \mathbf{v}}$$

Введем поляризованность среды  $\mathbf{P}$

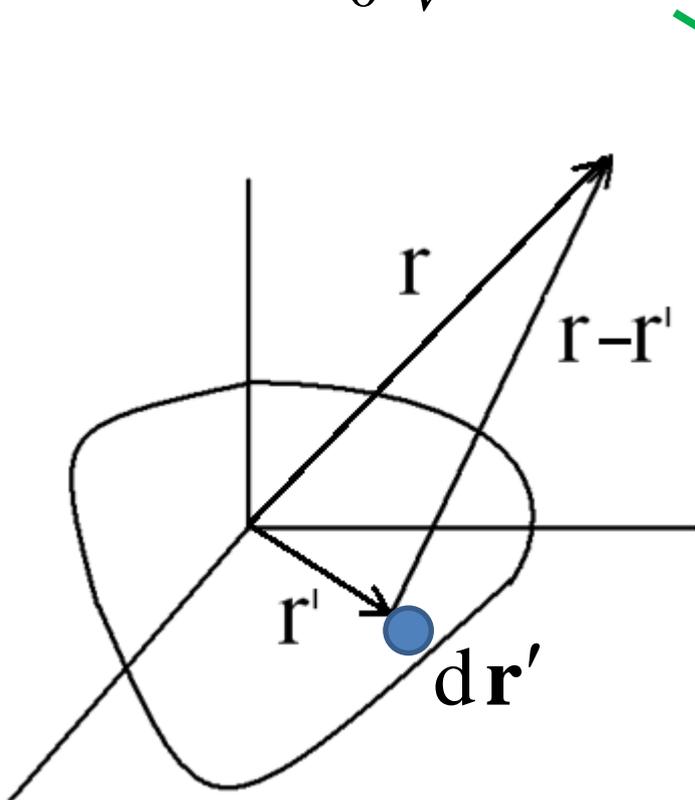
с помощью соотношения  $\mathbf{j} = \partial \mathbf{P} / \partial t$

$$\mathbf{P} = f(\mathbf{E}) \quad \mathbf{P} = \hat{\chi} \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\frac{\partial \rho_{\text{связ}}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{\text{связ}} + \operatorname{div} \mathbf{P}) = 0 \quad \rightarrow \rho_{\text{связ}} = -\operatorname{div} \mathbf{P}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{связ}}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_{\text{связ}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\text{div}' \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{P_n dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\text{div}' \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' + \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \text{div}' \left( \frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\mathbf{r}' = \end{aligned}$$

$\text{div}(\gamma \mathbf{a}) = \gamma \text{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \text{grad} \gamma$

$$\varphi_{\text{связ}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \text{grad}' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\mathbf{r}' =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \mathbf{P}(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{r}'$$

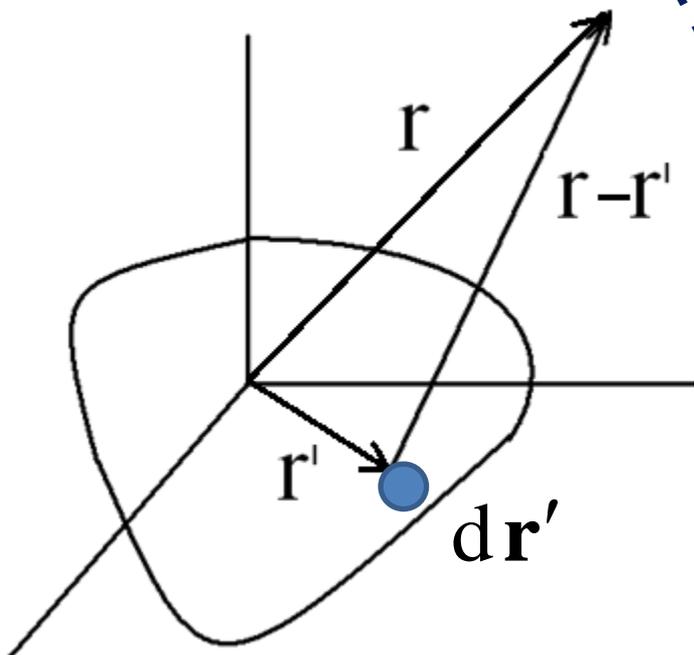
$$\varphi_{\text{связ}}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$\mathbf{d} = \int_V \rho_{\text{связ}}(\mathbf{r}') \mathbf{r}' d\mathbf{r}' = \int_V \tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

$$\varphi_{\text{связ}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{r}'$$

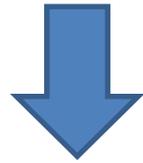
$$\tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{r}') = \mathbf{P}(\mathbf{r}')$$

$$\mathbf{d} = \int_V \rho_{\text{связ}}(\mathbf{r}') \mathbf{r}' d\mathbf{r}' = \int_V \mathbf{P} d\mathbf{r}'$$



$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \bar{\rho} / \varepsilon_0 \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

$$\bar{\rho} = \rho_{\text{своб}} + \rho_{\text{связ}} = \rho_{\text{своб}} - \operatorname{div} \mathbf{P}$$



$$\varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho_{\text{своб}} - \operatorname{div} \mathbf{P}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{\text{своб}}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \hat{\varepsilon} \mathbf{E}$$



$$\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{своб}}$$

Вакуум

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$$



$$\Delta \varphi = -\rho / \varepsilon_0$$

Диэлектрик

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$$

$$\mathbf{D} = \hat{\varepsilon} \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$$



$$\operatorname{div} \varepsilon_0 \hat{\varepsilon} \operatorname{grad} \varphi = -\rho$$

## Граничные условия

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$$



$$\mathbf{D}_{2n} - \mathbf{D}_{1n} = \sigma$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$



$$\mathbf{E}_{2t} - \mathbf{E}_{1t} = 0$$

Единственность решения системы

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

Пусть

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_{1,2} = \rho$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_{1,2} = 0$$



$$\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1 = \mathbf{D} \quad \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

$\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  – удовлетворяют нулевым граничным условиям

$$\operatorname{div} \gamma \mathbf{a} = \gamma \operatorname{div} \mathbf{a} + \operatorname{grad} \gamma \cdot \mathbf{a} \quad \mathbf{a} = \mathbf{D}, \quad \gamma = \varphi$$



$$\int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV = - \int_V \mathbf{D} \cdot \operatorname{grad} \varphi dV = - \int_V \operatorname{div}(\varphi \mathbf{D}) dV +$$

$$+ \int_V \varphi \operatorname{div} \mathbf{D} dV = - \int_{S_0} \varphi \mathbf{D} d\mathbf{S} \rightarrow 0 \quad (\mathbf{D}_n = 0)$$

Сила, действующая на диэлектрик во  
внешнем электрическом поле

$$\mathbf{F} = (\mathbf{d} \cdot \text{grad})\mathbf{E} = \int_{V_0} (\tilde{\mathbf{d}} \cdot \text{grad})\mathbf{E}dV \quad \tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{P}$$

$$\mathbf{F} = \int_{V_0} \mathbf{f}dV = \int_{V_0} (\mathbf{P} \cdot \text{grad})\mathbf{E}dV$$

$$\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}$$

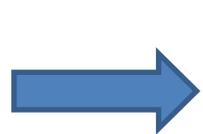
$$\mathbf{f} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)(\mathbf{E} \cdot \text{grad})\mathbf{E}$$

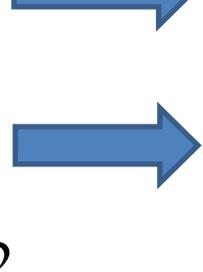
# Постоянный электрический ток в проводниках

$$\partial / \partial t = 0 \quad \rightarrow \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad \mathbf{j} = \text{const}$$

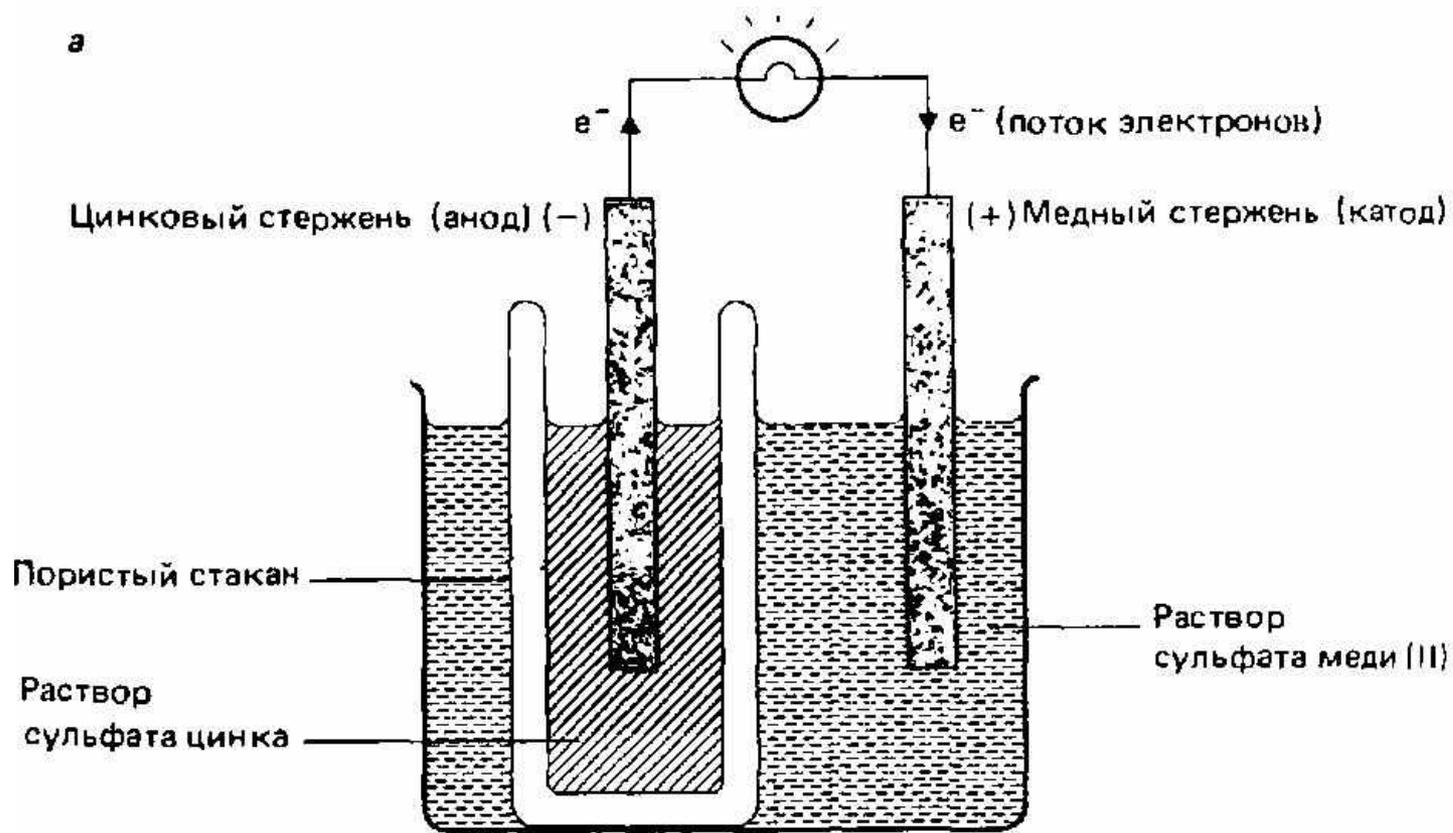
$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0 \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

 Линии тока всегда замкнуты

  $\mathbf{j}_{1n} = \mathbf{j}_{2n}$

  $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l} = I_{12} R_{12}$

$$\int_1^2 (\mathbf{E}_{\text{ном}} + \mathbf{E}_{\text{стор}}) d\mathbf{l} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12} = I_{12} R_{12}$$



Для замкнутой цепи

$$\int_1^2 \mathbf{E}_{\text{стор}} d\mathbf{l} = \varepsilon_{12} = I_{12} R_{12}$$

## Правила Кирхгофа:

Алгебраическая сумма всех токов, втекающих в любой узел, равна нулю.

Для любого контура алгебраическая сумма падений напряжения на его элементах равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре.



$$\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12} = I_{12} R_{12}$$

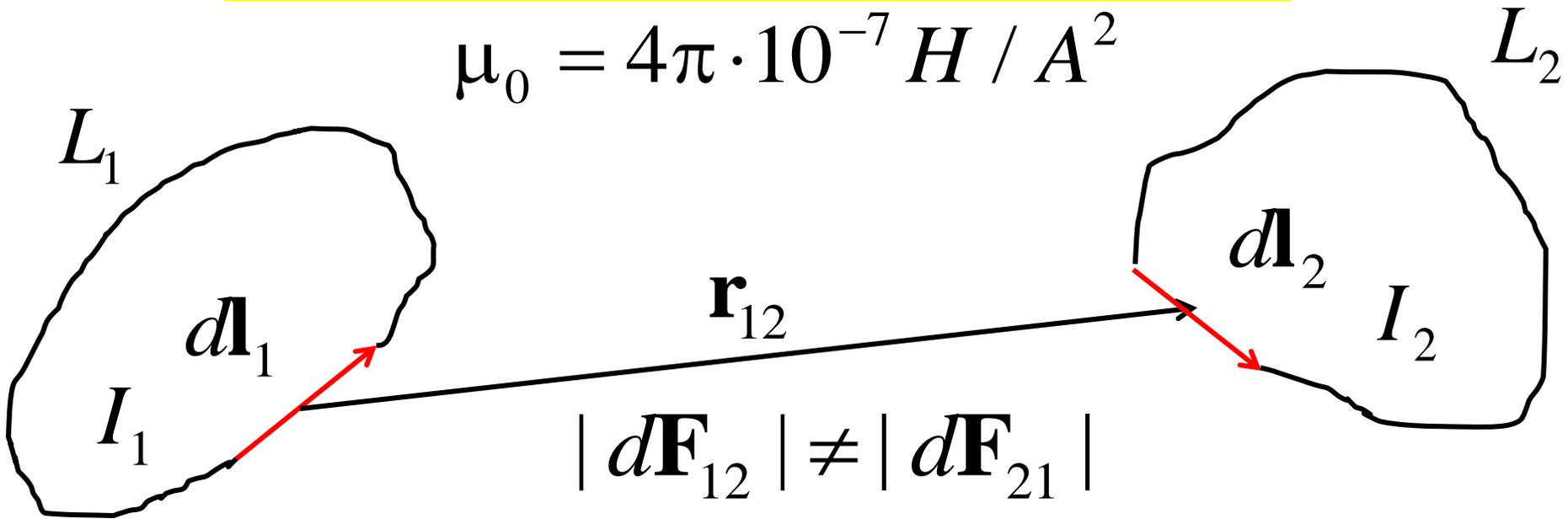


$$N = I^2 R$$

# Закон Ампера

$$d\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 [d\mathbf{l}_2 \times [d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12}]]}{4\pi r_{12}^3}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H / A}^2$$



$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{[d\mathbf{l}_2 \times [d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12}]]}{r_{12}^3}$$

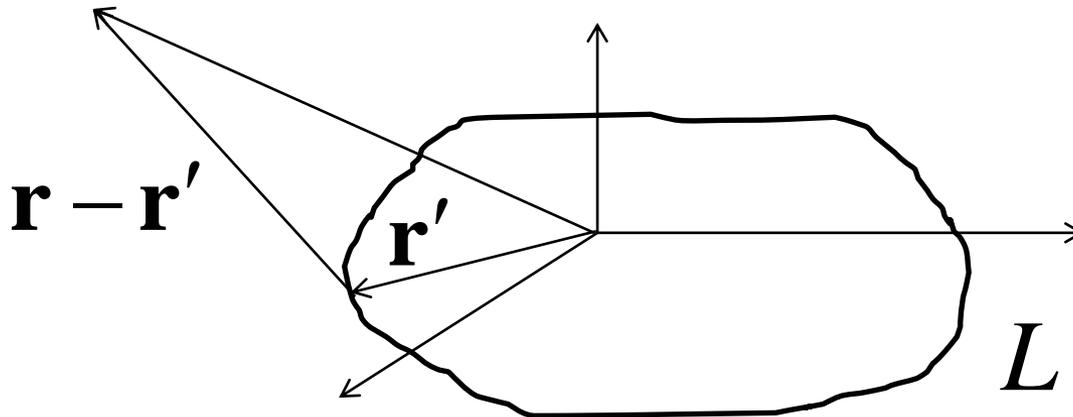
$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

## Индукция магнитного поля

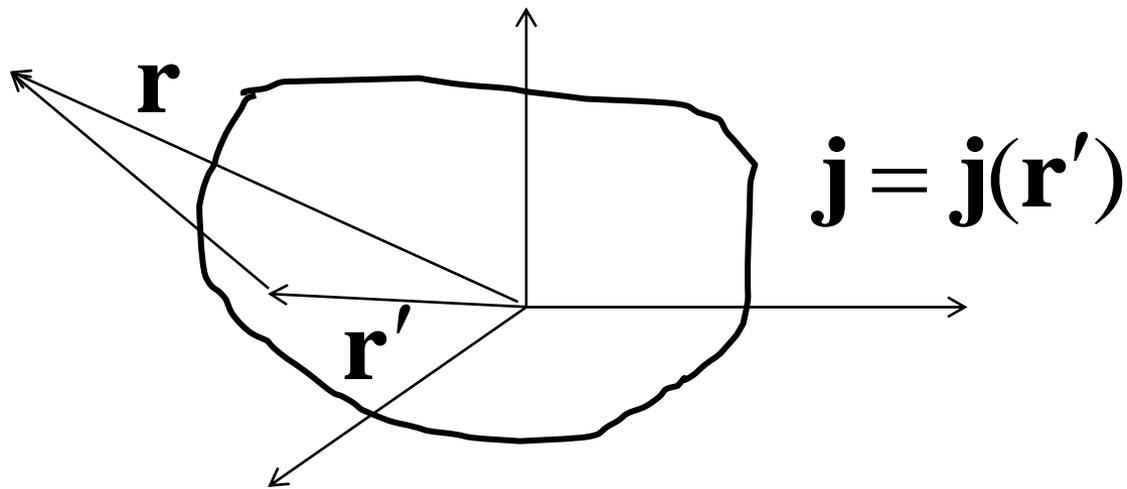
$$d\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 [d\mathbf{l}_2 \times [d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12}]]}{4\pi r_{12}^3}$$

$$d\mathbf{F}_{12} = I_2 [d\mathbf{l}_2 \times d\mathbf{B}_{12}] \quad d\mathbf{B}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 [d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12}]}{4\pi r_{12}^3}$$

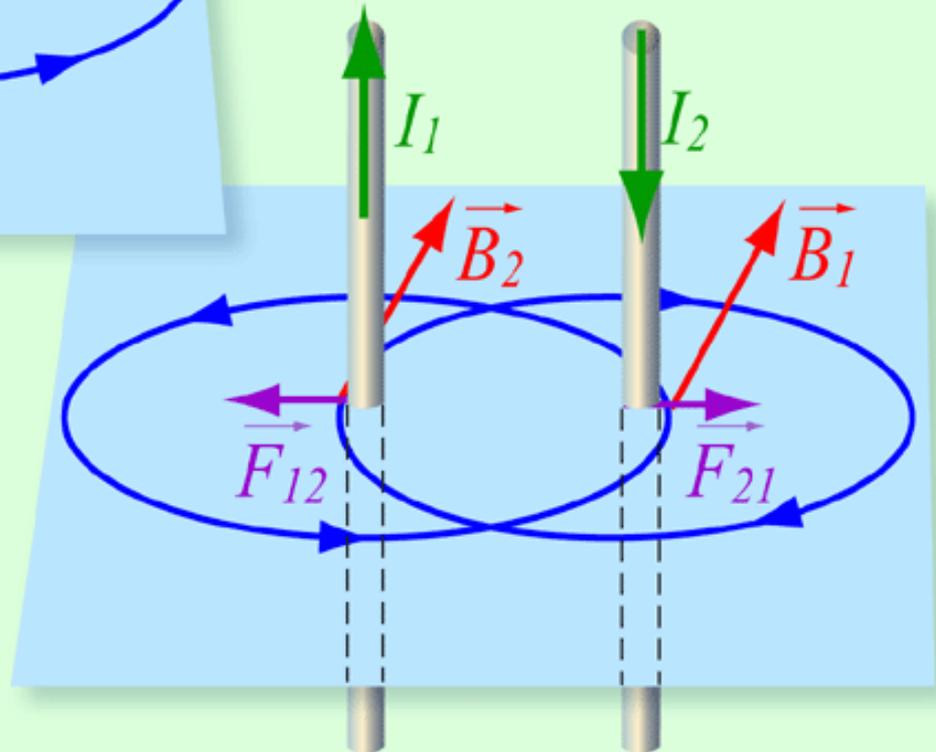
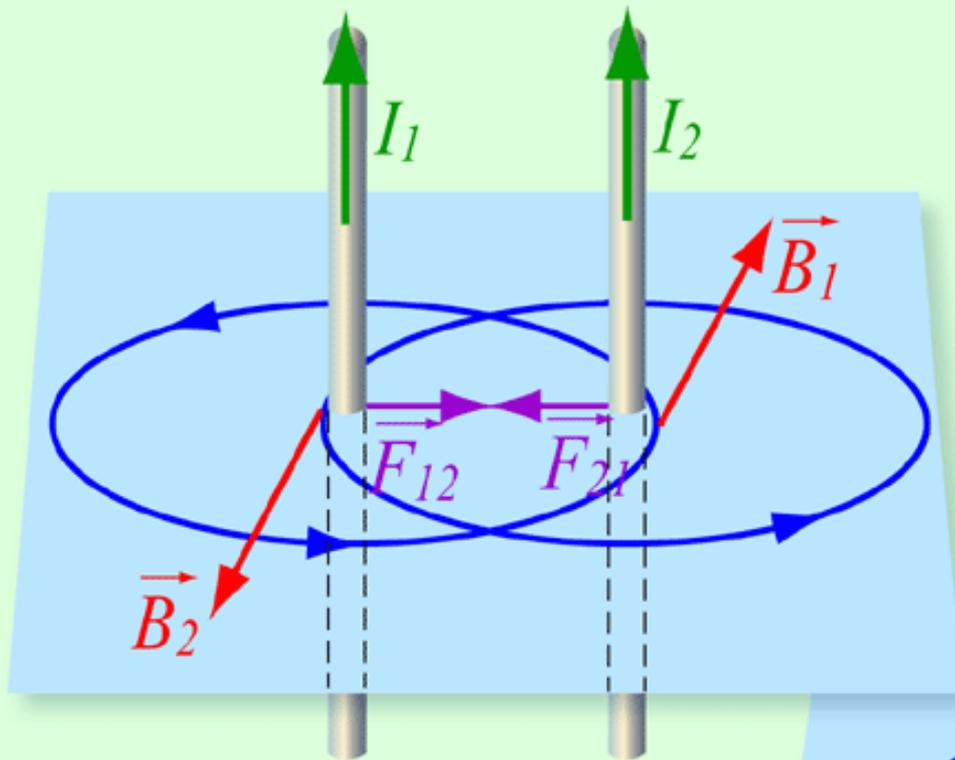
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{[d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$



$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{[d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] }{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] }{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{r}'$$



$$\mathbf{F} = I \oint_L [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}]$$





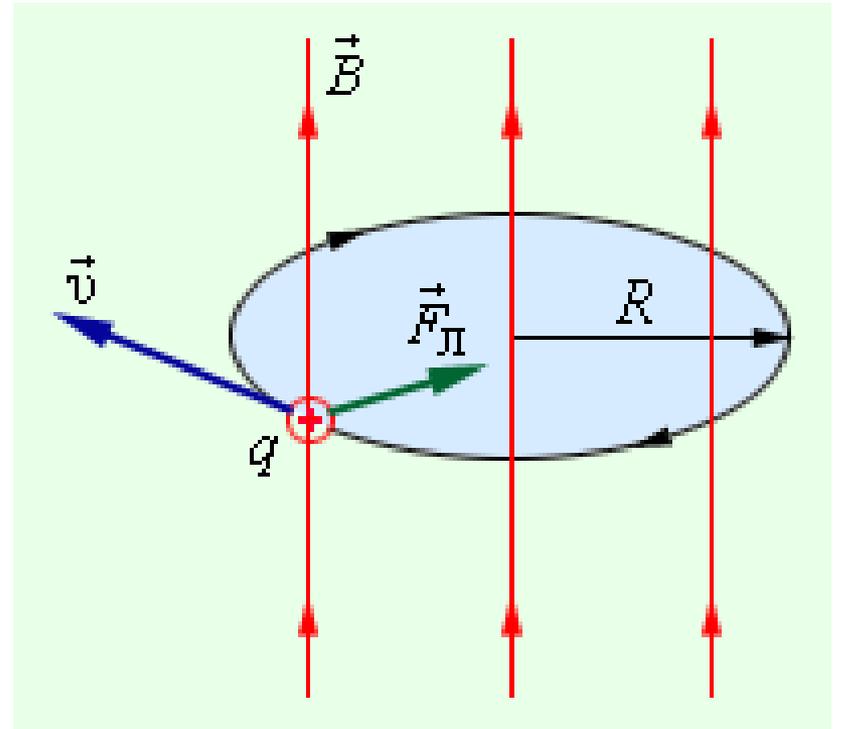
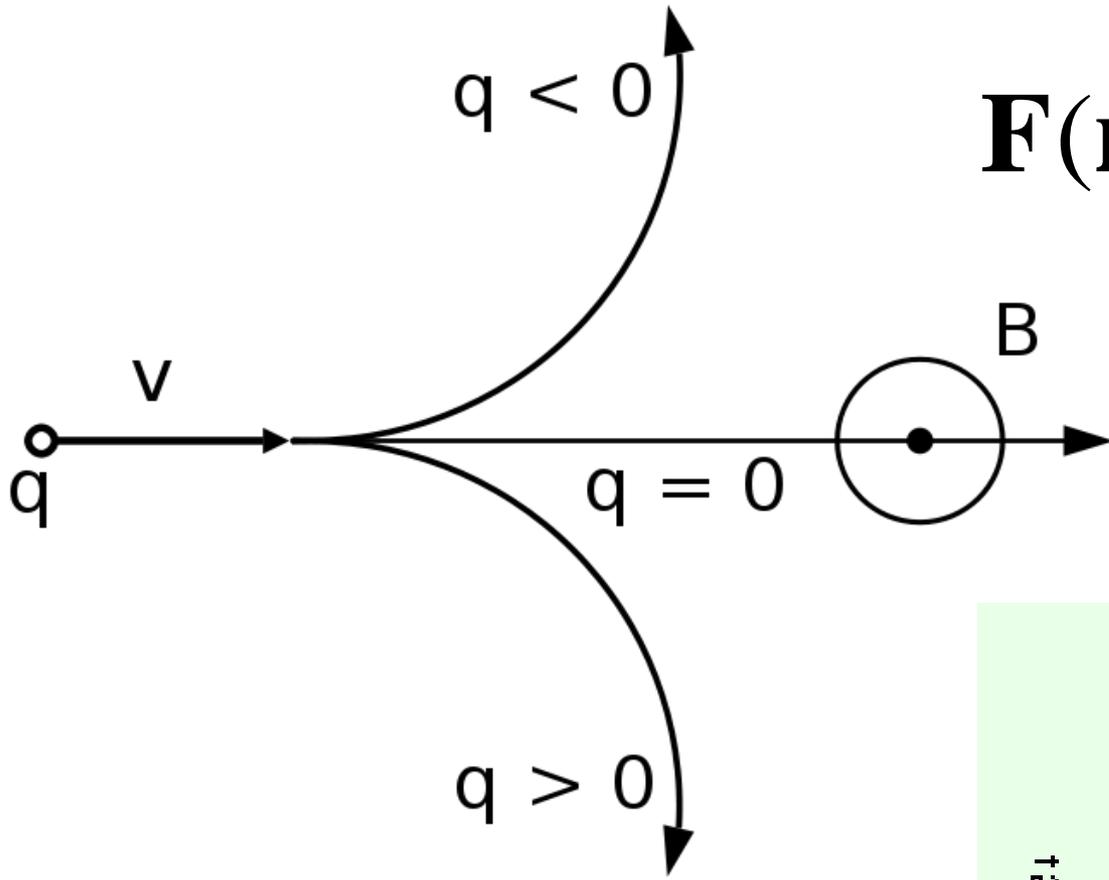
$$\mathbf{F} = I \oint_L [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}]$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \oint_V [\mathbf{j}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \mathbf{B}(\mathbf{r}')] d\mathbf{r}'$$

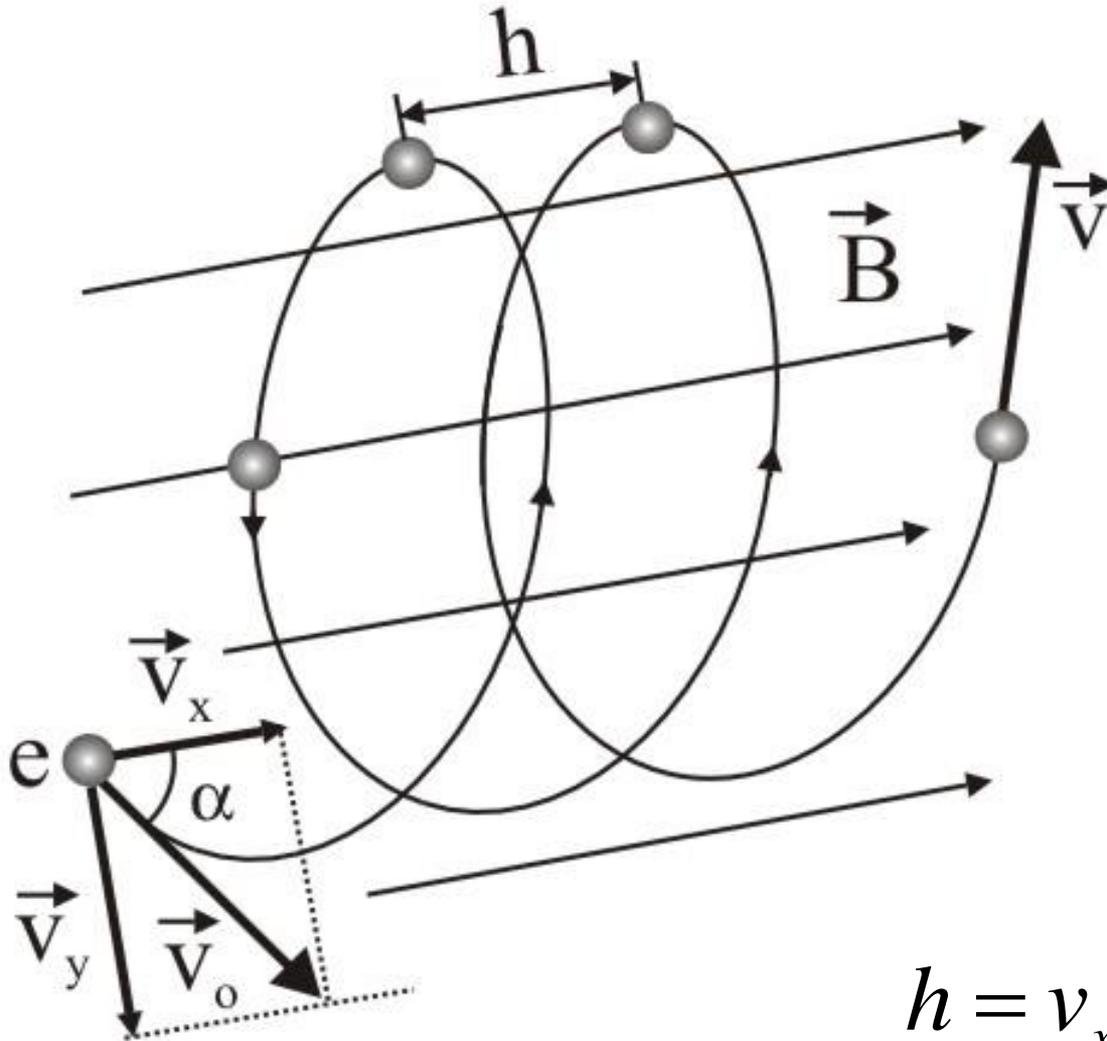
Сила Лоренца

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q \oint_V [\mathbf{v} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \mathbf{B}(\mathbf{r}')] d\mathbf{r}' = q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})]$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})]$$



$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})]$$



$$\frac{mv_y^2}{r} = qBv_y$$

$$v_y = qBr / m$$

$$\omega = qB / m$$

$$T = 2\pi m / qB$$

$$h = v_x T = 2\pi m v_x / qB$$

## Векторный потенциал

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad ?$$

Да!

$$\text{rot } \gamma \mathbf{a} = \gamma \text{rot } \mathbf{a} + [\text{grad } \gamma \times \mathbf{a}]$$

$$\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[ \text{grad} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

$$\text{rot } \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$$

$$\text{div } \mathbf{B} = \text{div rot } \mathbf{A} = 0$$

## Свойства векторного потенциала

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \operatorname{div} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{j_n(\mathbf{r}') dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 0$$

# Свойства векторного потенциала

$$A_x(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{j_x(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad \longleftrightarrow \quad \Delta\varphi = -\rho / \epsilon_0$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad \longleftrightarrow \quad \Delta\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{j}$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} = -\Delta\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{j}$$

$\swarrow = 0$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

$$\int_{S_0} \text{rot } \mathbf{B} d\mathbf{S} = \mu_0 \int_{S_0} \mathbf{j} d\mathbf{S}$$

$$\int_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^N I_k$$

Полная система уравнений для индукции  
магнитного поля

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad \text{div } \mathbf{B} = 0$$

Граничные условия

$$\mathbf{B}_{2t} - \mathbf{B}_{1t} = \mu_0 \mathbf{i}$$

$$\mathbf{B}_{2n} = \mathbf{B}_{1n}$$

# Единственность решения системы уравнений для индукции магнитного поля

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{B} - \mathbf{B}' = \mathbf{B}''$$

$$\mathbf{B}_{2t} - \mathbf{B}_{1t} = \mathbf{i}$$

$$\mathbf{B}_{2n} = \mathbf{B}_{1n}$$

$$\text{rot } \mathbf{B}'' = 0 \quad \text{div } \mathbf{B}'' = 0 \quad \mathbf{B}''_{2t} - \mathbf{B}''_{1t} = 0 \quad \mathbf{B}''_{2n} = \mathbf{B}''_{1n}$$

$$\text{div}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \mathbf{b} \text{ rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \text{ rot } \mathbf{b}$$

$$\int \mathbf{b} \text{ rot } \mathbf{a} dv = \int \text{div}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] dv + \int \mathbf{a} \text{ rot } \mathbf{b} dv$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{B}'' \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \downarrow \\ \vdots \end{array} \quad \mathbf{a} = \mathbf{A}'' \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \downarrow \\ = 0 \end{array} \quad \mathbf{B}'' = \text{rot } \mathbf{A}''$$

$$\int_V \mathbf{B}'' \cdot \mathbf{B}'' dv = \int_V \text{div}[\mathbf{A}'' \times \mathbf{B}''] dv = \int_S [\mathbf{A}'' \times \mathbf{B}'']_n dS \Rightarrow 0$$