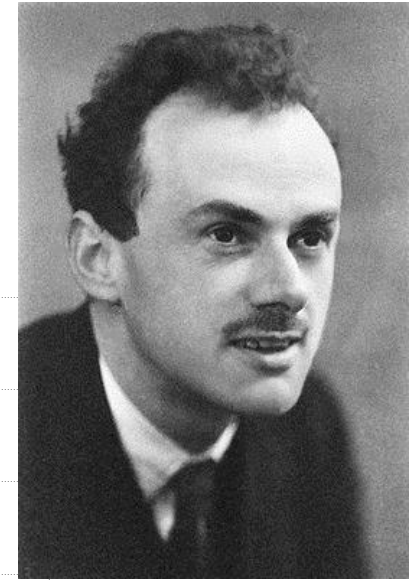


Построение сигнала по спектру

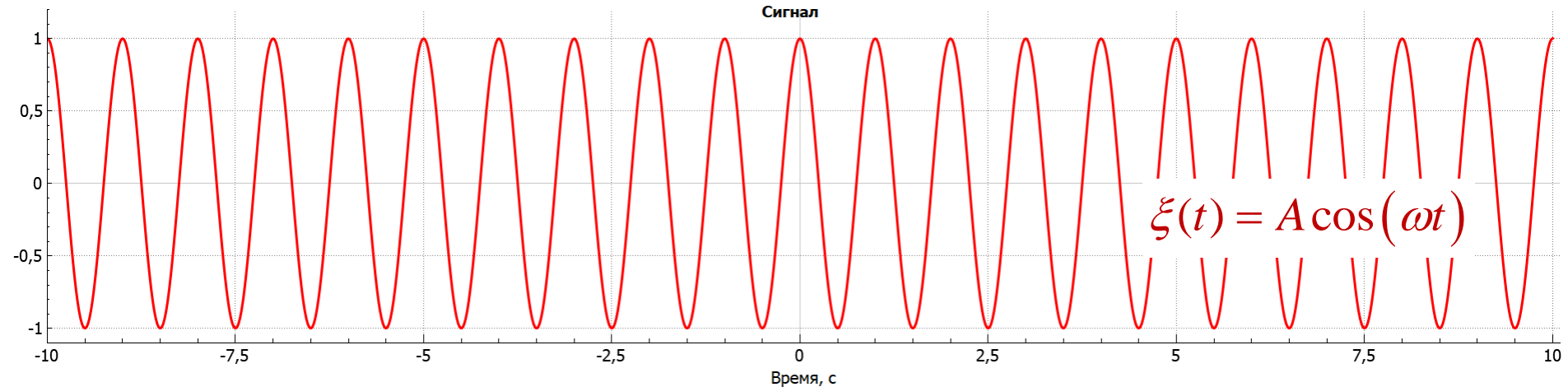
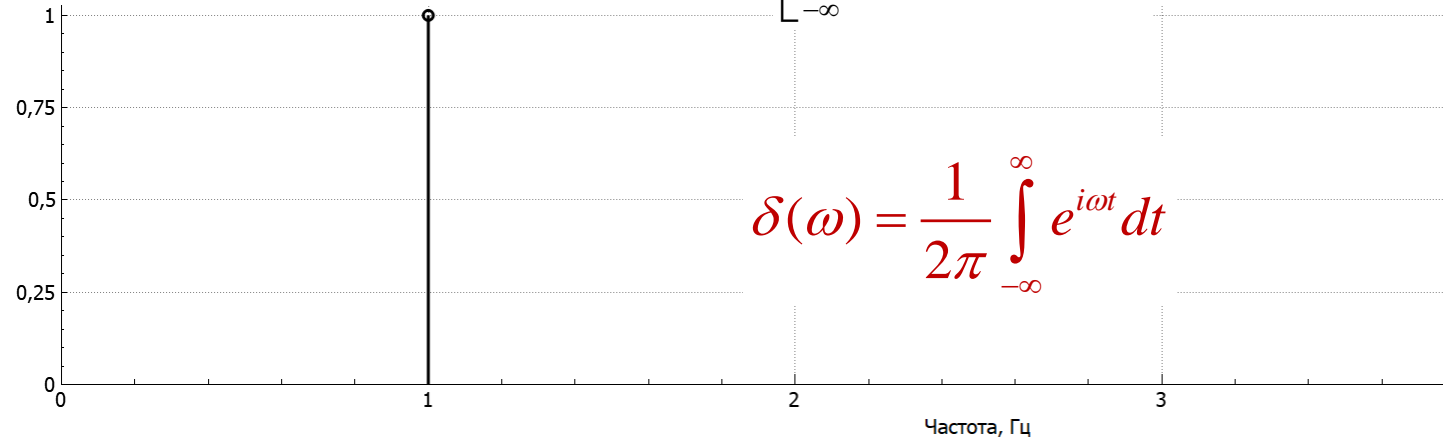
$$\int \delta(x-a)f(x)dx = f(a)$$

$$\left[\begin{array}{l} \delta(x) = 0 \quad \forall x \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1 \end{array} \right.$$

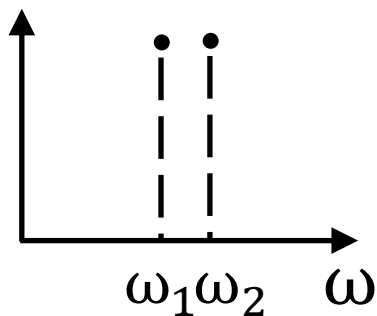
$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt$$



Paul Adrien Maurice Dirac
1902-1984



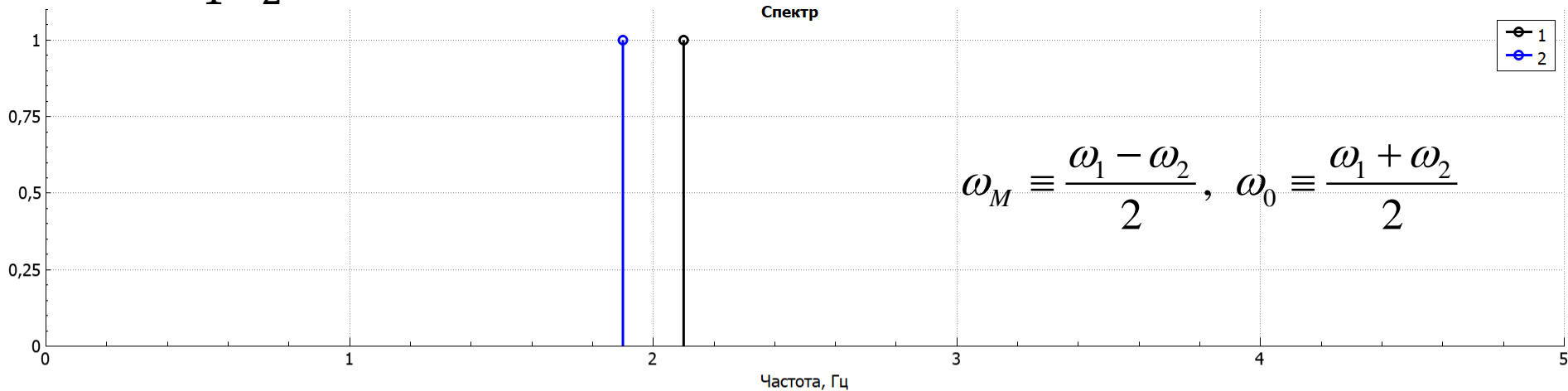
Два гармонических сигнала на разных частотах



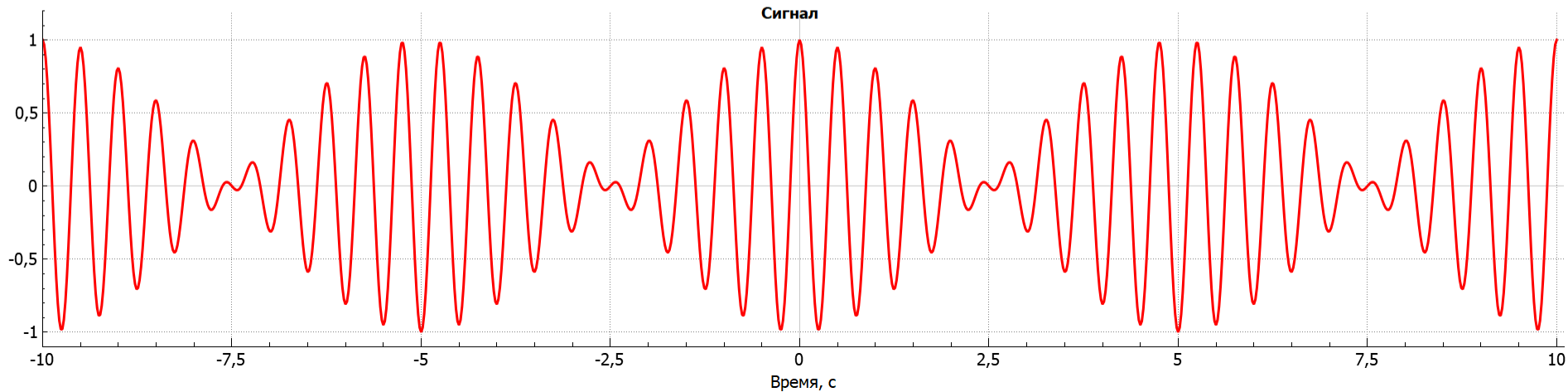
$$\xi(t) = A \cos(\omega_1 t) + A \cos(\omega_2 t) =$$

$$= 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) = 2A \cos(\omega_M t) \cos(\omega_0 t)$$

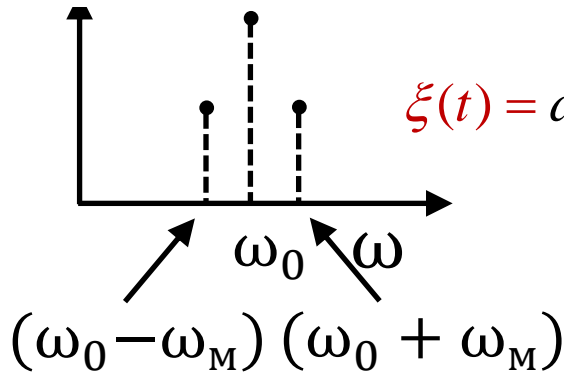
Спектр



Сигнал

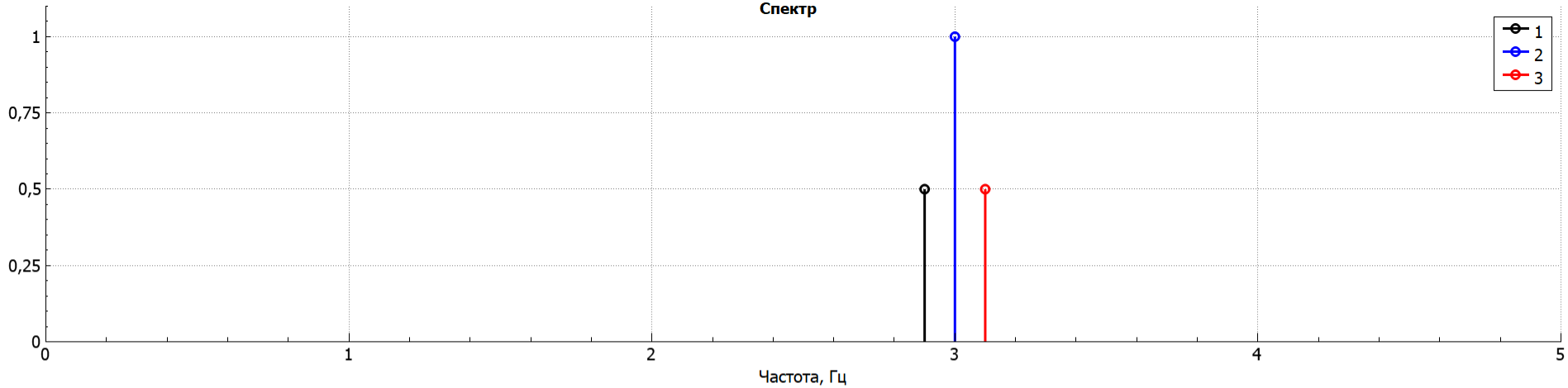


Три гармонических сигнала

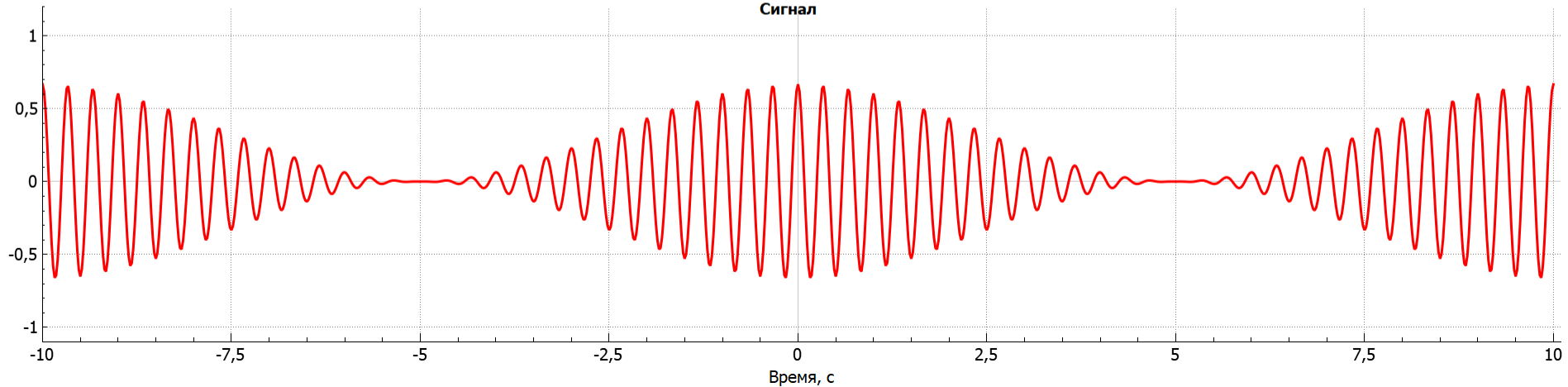


$$\xi(t) = a \cos(\omega_0 t) + \frac{am}{2} \cos[(\omega_0 - \omega_M)t] + \frac{am}{2} \cos[(\omega_0 + \omega_M)t] = a [1 + m \cos(\omega_M t)] \cos(\omega_0 t)$$

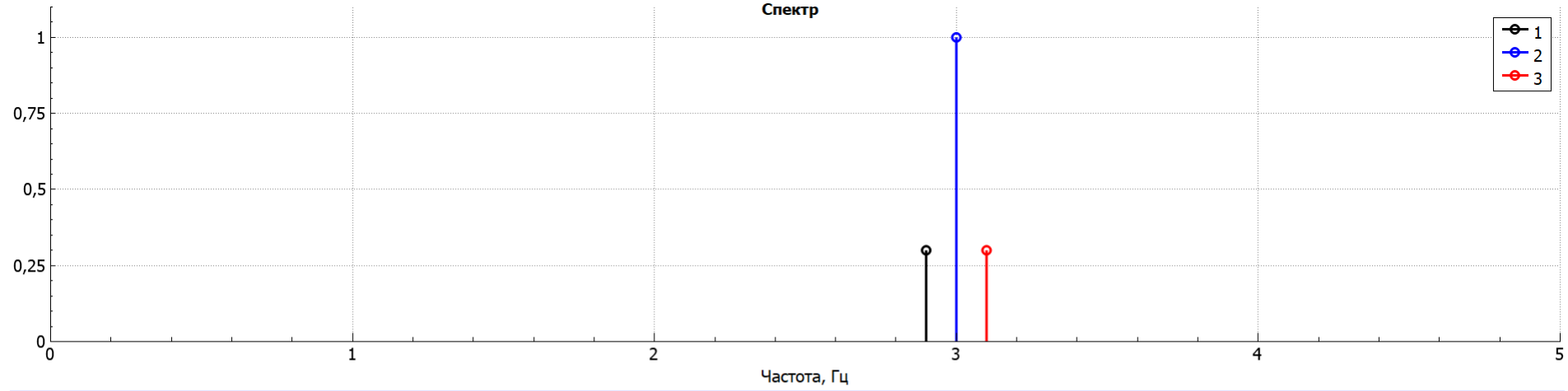
Спектр



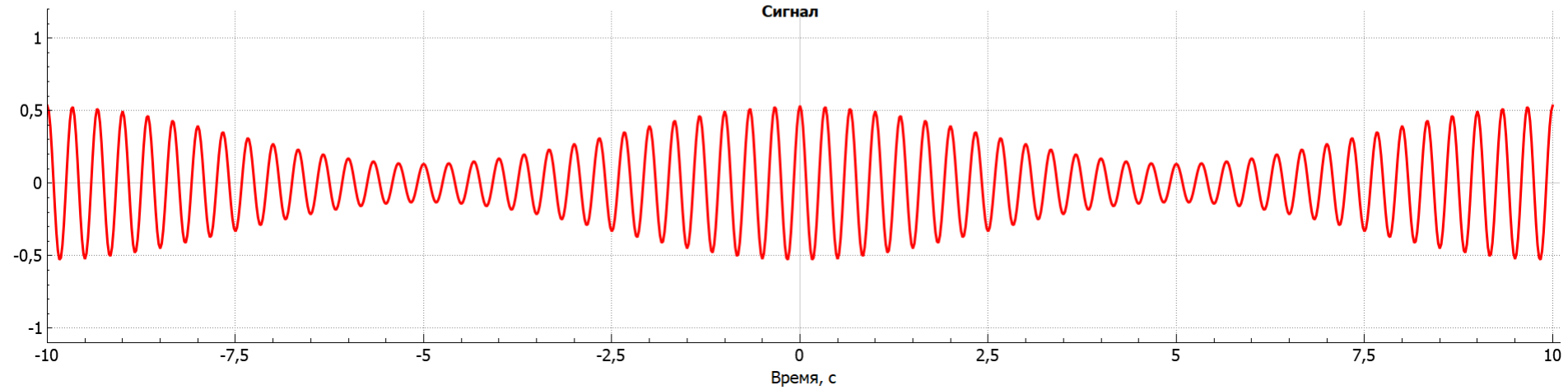
Сигнал



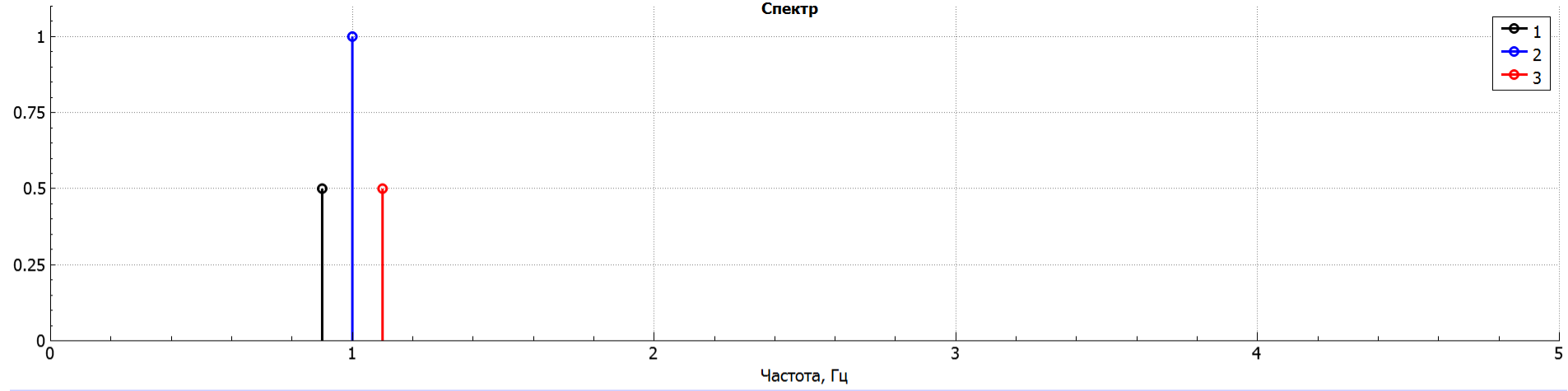
Спектр



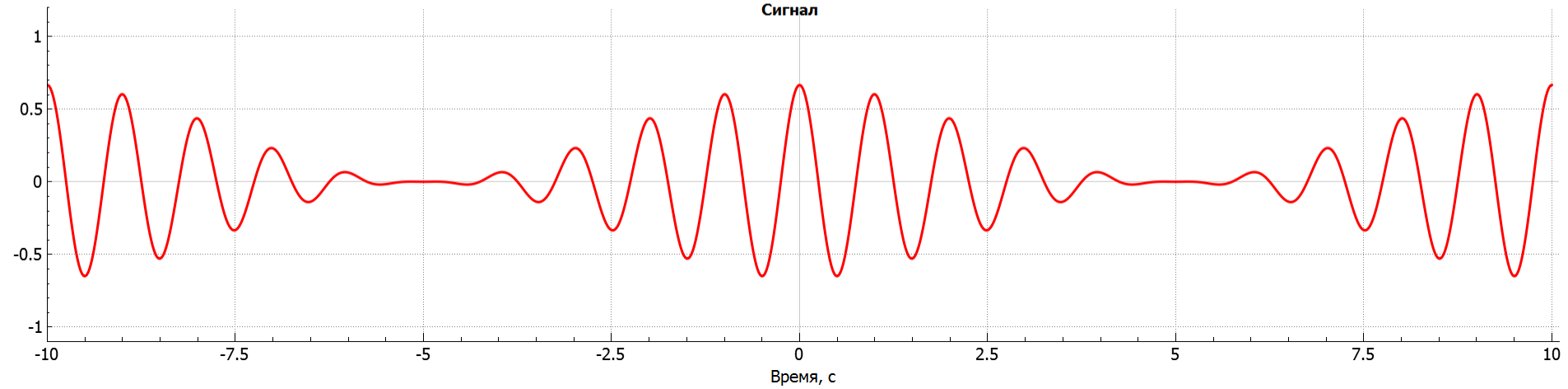
Сигнал



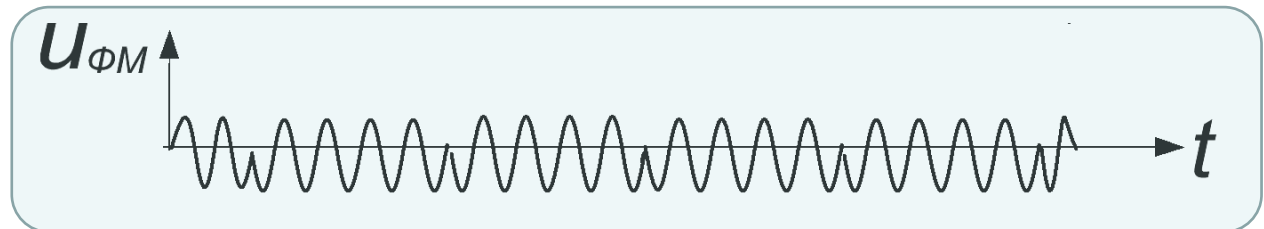
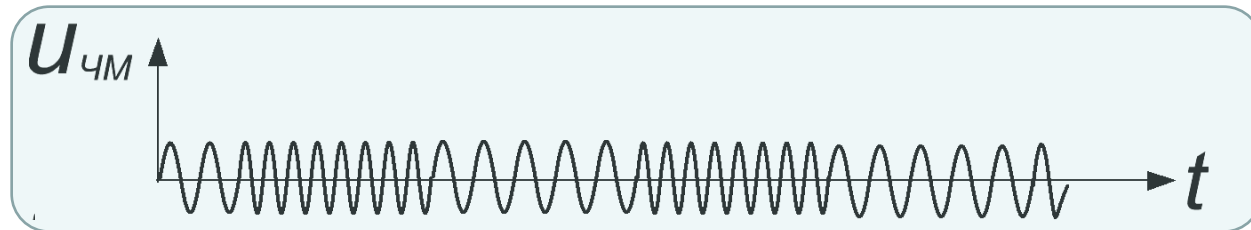
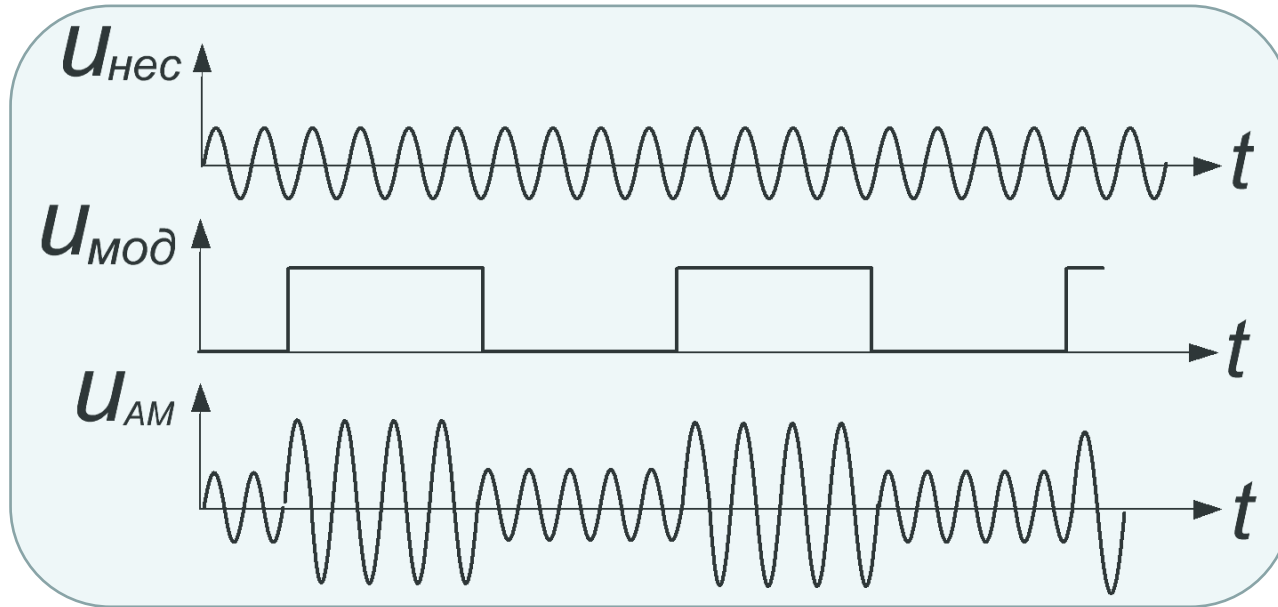
Спектр



Сигнал



О радиовещании



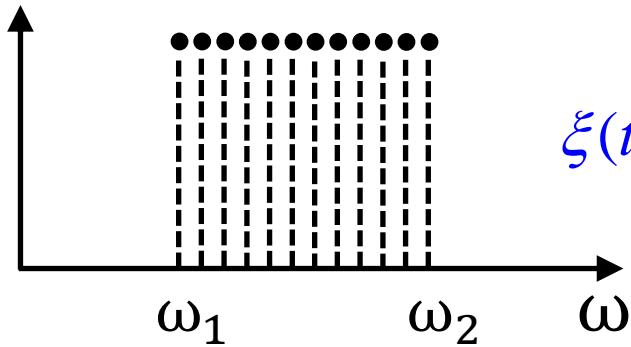
Диапазоны радиоволн

	Диапазон	λ , м	ν , МГц
FM	УКВ (ультракороткие волны)	2,77-3,42; 4,11-4,56	87,5-108; 65,8-73
AM	КВ (короткие волны)	11,4-130,4	2,3-26,3
AM	СВ (средние волны)	186,9-571,4	0,525-1,605
AM	ДВ (длинные волны)	735,3-2000	0,15-0,408

$$\nu = 89,1 \text{ МГц}$$

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu} = 3,37 \text{ м}$$

Суперпозиция эквидистантных частот

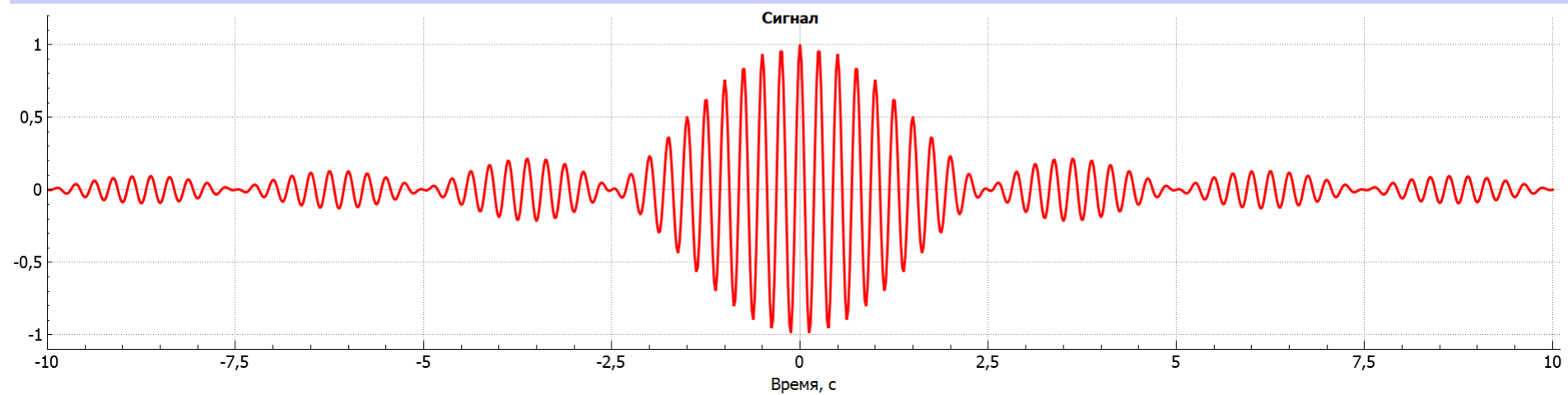
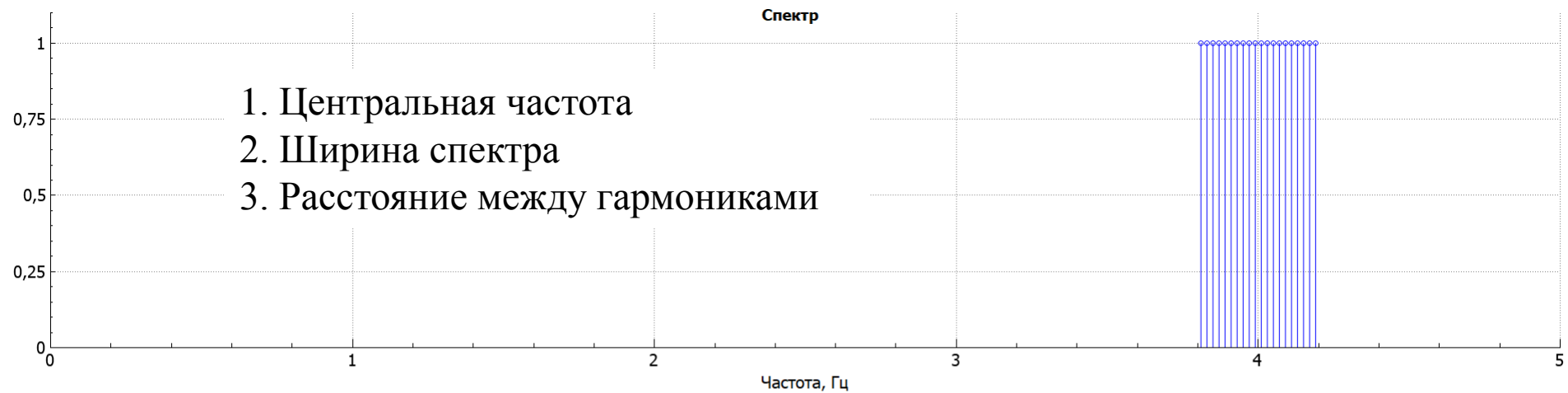


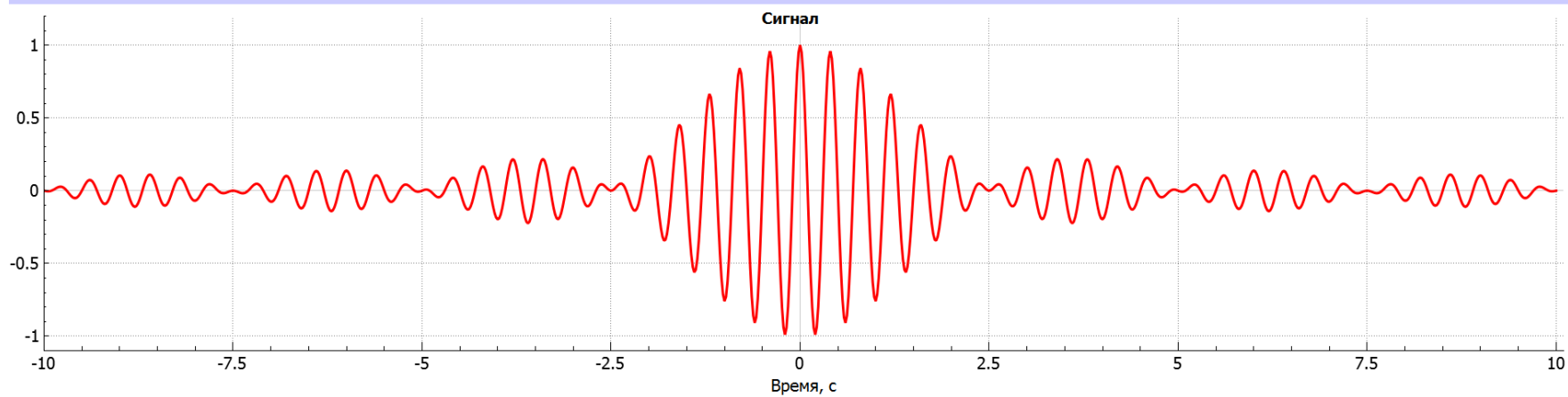
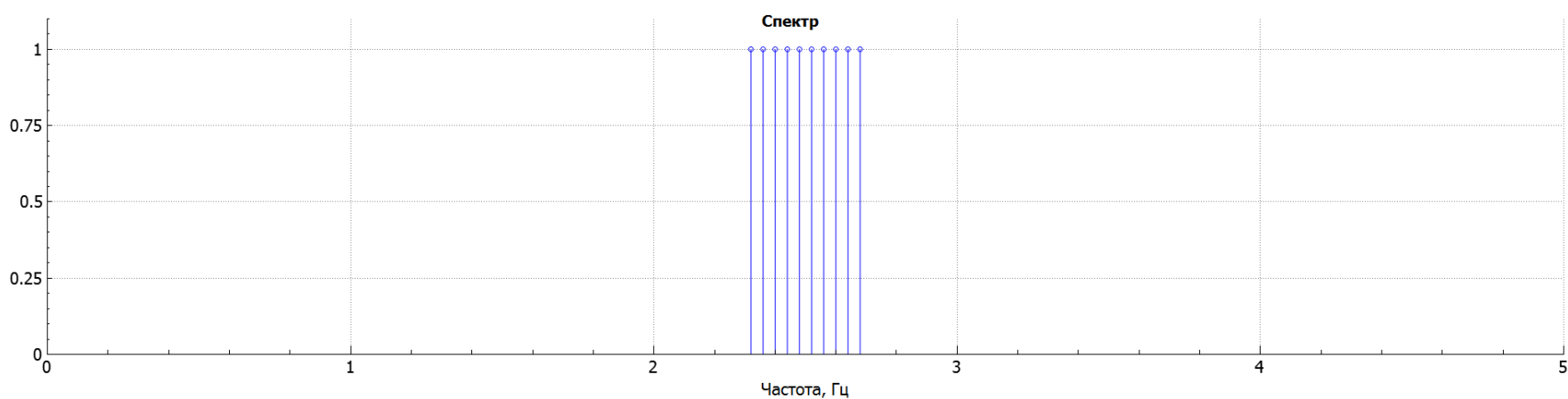
$$\xi(t) = a \sum_{n=0}^{N-1} \cos [(\omega_1 + n\delta\omega)t] \quad \delta\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{N-1}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \Rightarrow a \cos(\omega t) = a \operatorname{Re} [e^{i\omega t}]$$

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \operatorname{Re} \left\{ a \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(\omega_1 + n\delta\omega)t} \right\} = a \operatorname{Re} \left\{ e^{i\omega_1 t} \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\delta\omega t} \right\} = a \operatorname{Re} \left\{ e^{i\omega_1 t} \frac{1 - e^{iN\delta\omega t}}{1 - e^{i\delta\omega t}} \right\} = \\ &= a \operatorname{Re} \left\{ e^{i\omega_1 t} \frac{e^{iN\delta\omega t/2}}{e^{i\delta\omega t/2}} \frac{e^{-iN\delta\omega t/2} - e^{iN\delta\omega t/2}}{e^{-i\delta\omega t/2} - e^{i\delta\omega t/2}} \right\} = a \operatorname{Re} \left\{ e^{i\omega_1 t} e^{i(N-1)\delta\omega t/2} \frac{\sin(N\delta\omega t/2)}{\sin(\delta\omega t/2)} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \xi(t) = a \frac{\sin(N\delta\omega t/2)}{\sin(\delta\omega t/2)} \cos \left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right] \end{aligned}$$

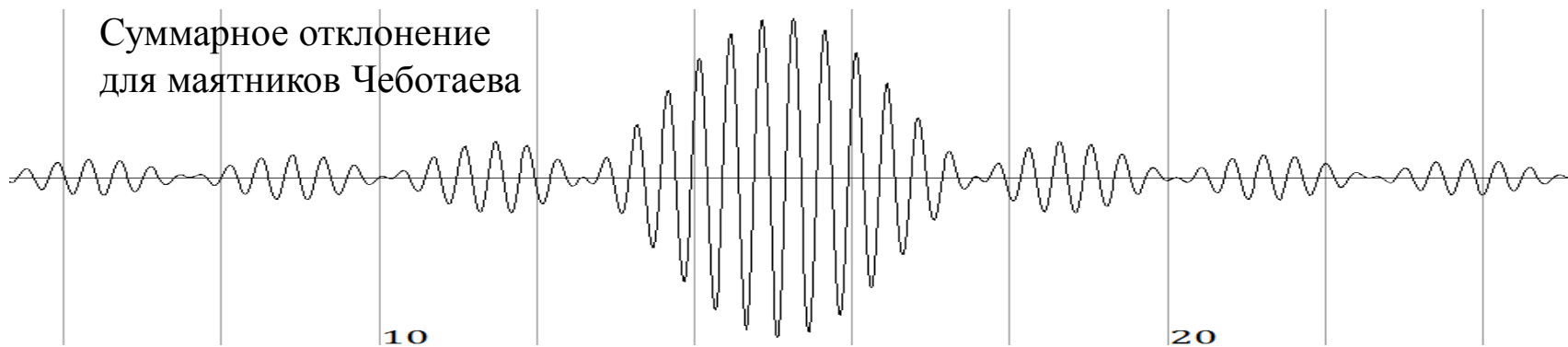
Суперпозиция эквидистантных частот





Волновой пакет | Количество гармоник 10 | Центральная частота 2.5 | Шаг 0.04 | Меню

Суммарное отклонение для маятников Чеботаева



Непрерывные периодические функции

$$\xi(t) = \xi(t + T)$$

$$\xi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos[\omega_n t] + b_n \sin[\omega_n t])$$

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T} = n\omega_0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \xi(t) \cos[\omega_n t] dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \xi(t) \sin[\omega_n t] dt$$

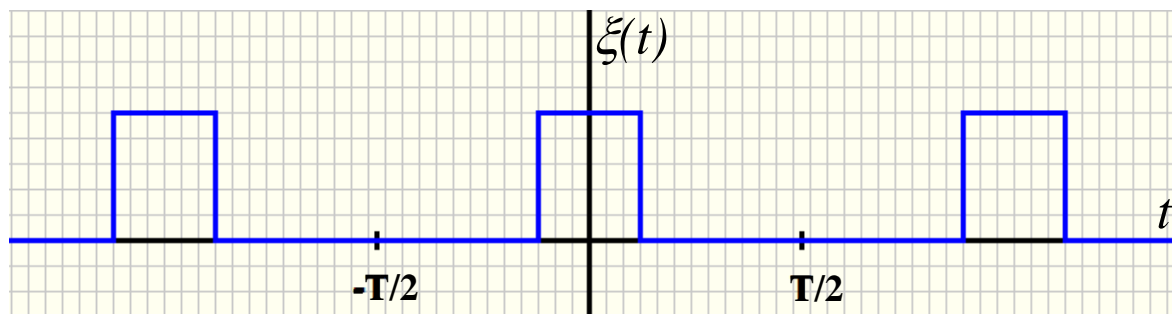
$$\xi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{i\omega_n t} \quad d_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \xi(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

$$a_n = 2 \operatorname{Re} d_n \quad b_n = -2 \operatorname{Im} d_n$$

Пример: последовательность прямоугольных импульсов

$$\xi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{i\omega_n t}$$

$$d_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

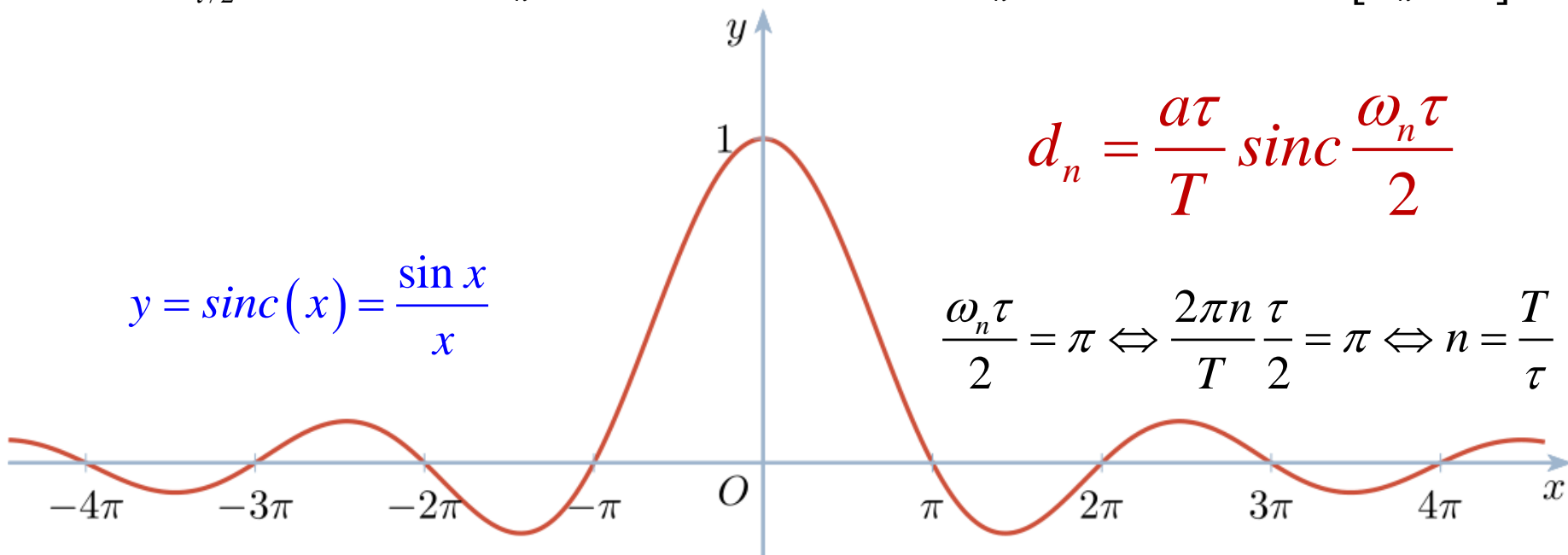


$$d_n = \frac{a}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-i\omega_n t} dt = \frac{a}{T} \frac{(-1)}{i\omega_n} \left(e^{-i\omega_n \tau/2} - e^{i\omega_n \tau/2} \right) = \frac{a}{T} \frac{1}{i\omega_n} 2i \sin \frac{\omega_n \tau}{2} = \frac{a\tau}{T} \frac{\sin[\omega_n \tau / 2]}{[\omega_n \tau / 2]}$$

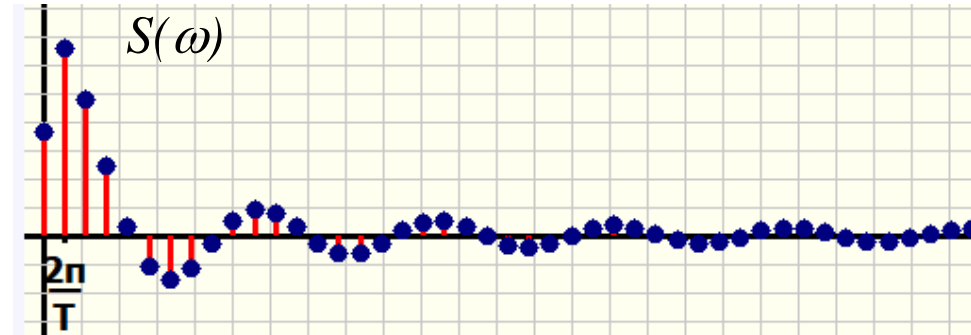
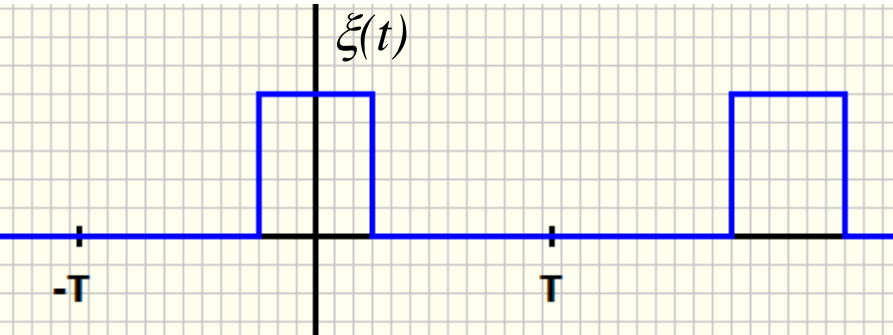
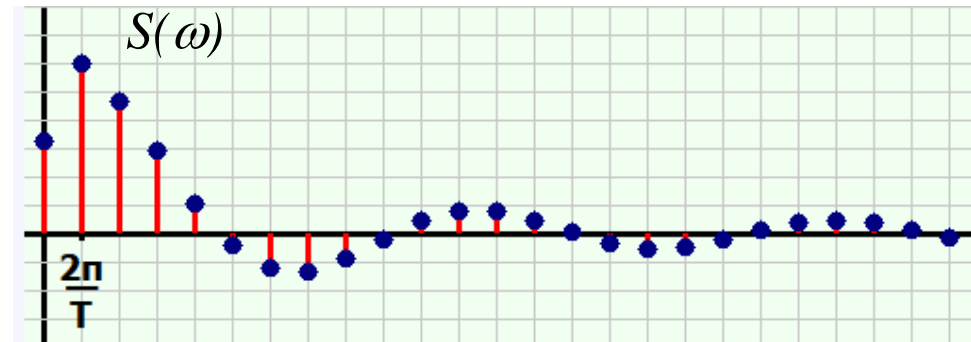
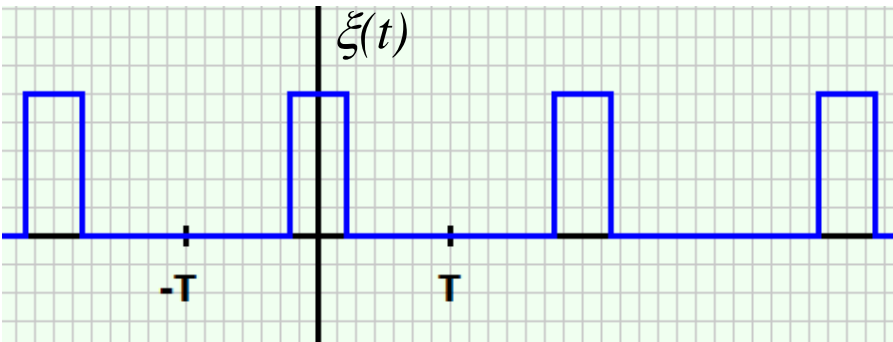
$$d_n = \frac{a\tau}{T} \operatorname{sinc} \frac{\omega_n \tau}{2}$$

$$y = \operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$\frac{\omega_n \tau}{2} = \pi \Leftrightarrow \frac{2\pi n \tau}{T} \frac{\tau}{2} = \pi \Leftrightarrow n = \frac{T}{\tau}$$

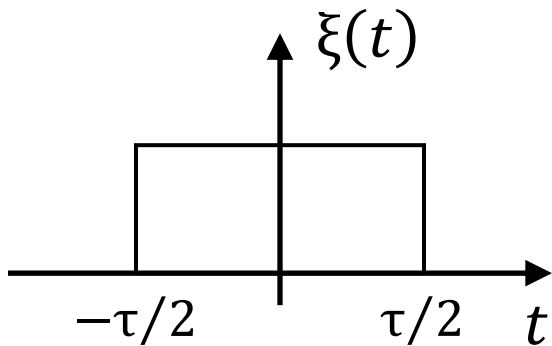


Пример: последовательность прямоугольных импульсов

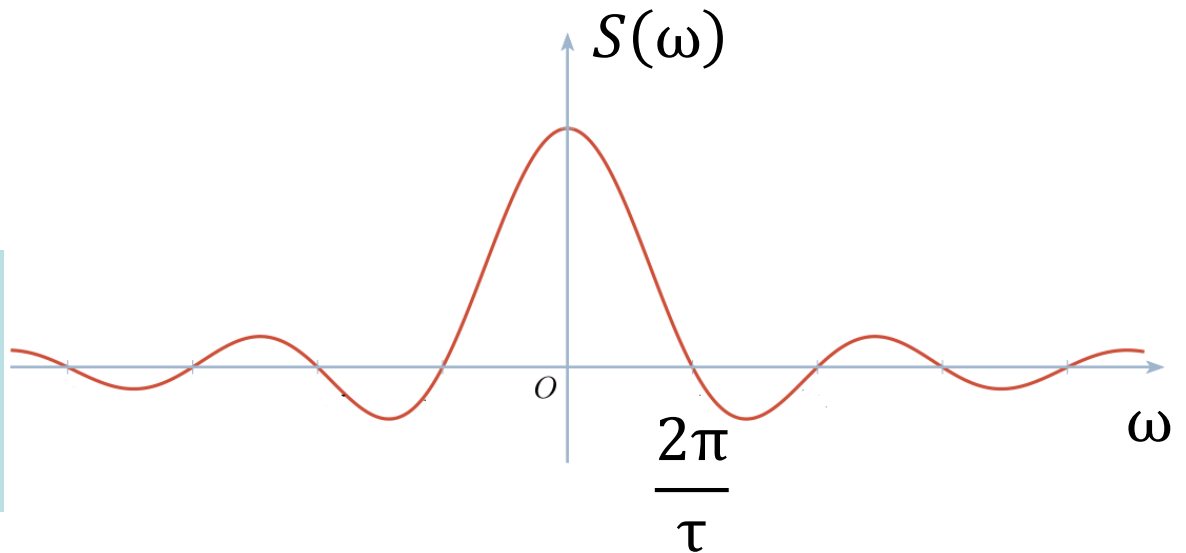


Спектр одиночного импульса. Интеграл Фурье

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t) e^{-i\omega t} dt \quad \xi(t) = \int_0^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$



$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} a e^{-i\omega t} dt = \frac{a}{2\pi i \omega} 2i \sin \frac{\omega \tau}{2} = \frac{a\tau}{2\pi} \operatorname{sinc} \frac{\omega \tau}{2}$$



$$\tau \Delta \omega = 2\pi$$

$$\tau \Delta \omega \geq C_{\text{эксперимент}}$$

Свойства преобразования Фурье

$$\xi_1(t) \leftrightarrow S_1(\omega) \qquad \xi_2(t) \leftrightarrow S_2(\omega)$$

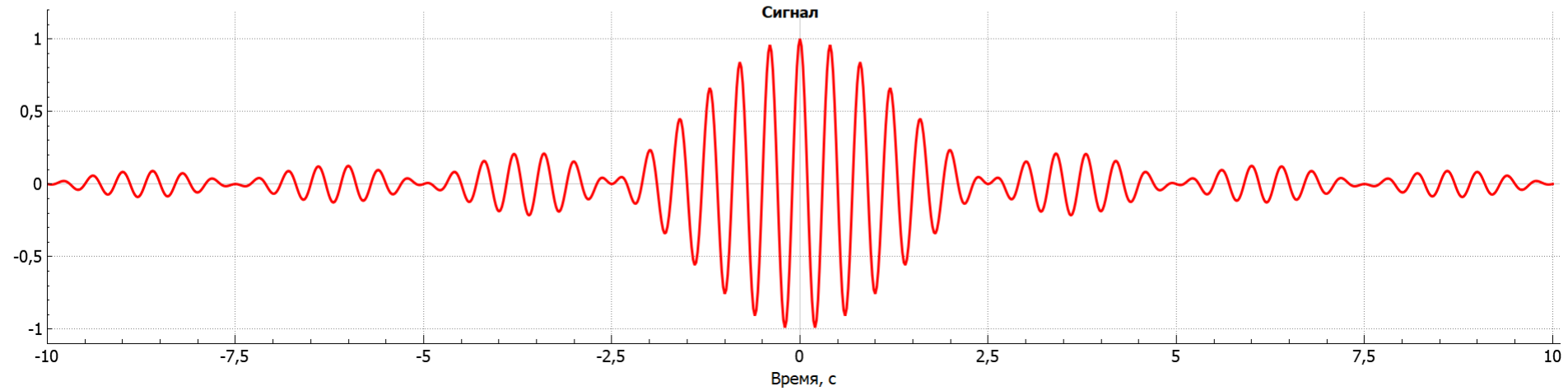
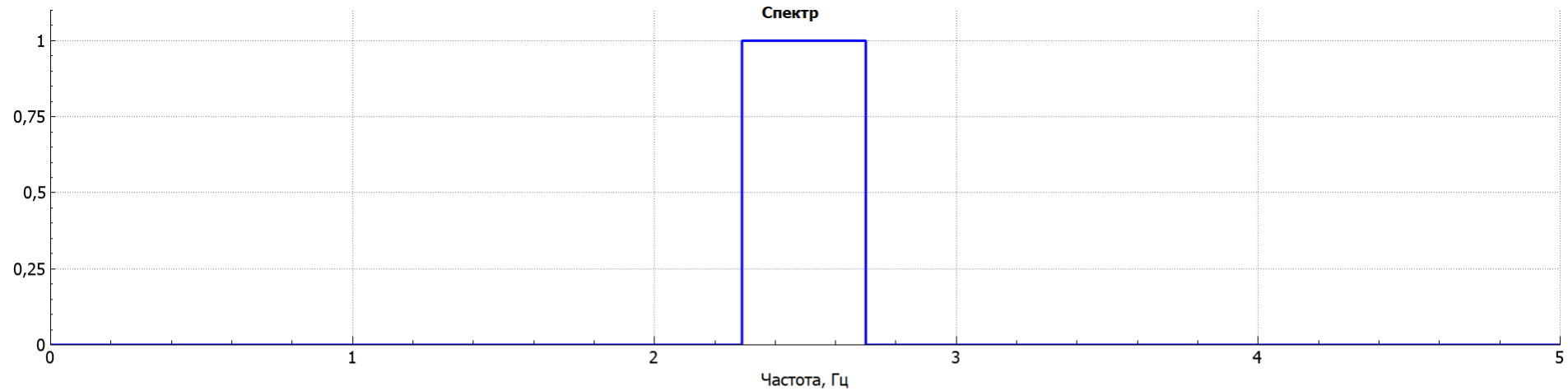
$$a\xi_1(t) + b\xi_2(t) \leftrightarrow aS_1(\omega) + bS_2(\omega)$$

$$\xi_2(t) = \xi_1(t - t_0) \leftrightarrow S_2(\omega) = S_1(\omega)e^{-i\omega t_0}$$

$$S_2(\omega) = S_1(\omega - \omega_0) \leftrightarrow \xi_2(t) = \xi_1(t)e^{i\omega_0 t}$$

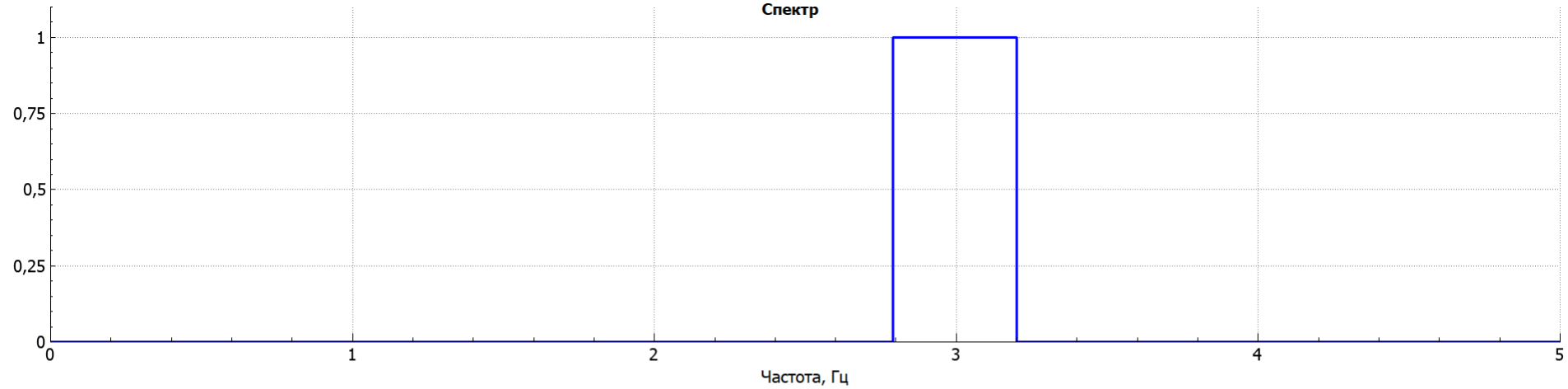
$$\xi_1(t)\xi_2(t) \leftrightarrow S_1(\omega) \otimes S_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\theta)S_2(\omega - \theta)d\theta$$

Радиоимпульс (видеоимпульс)

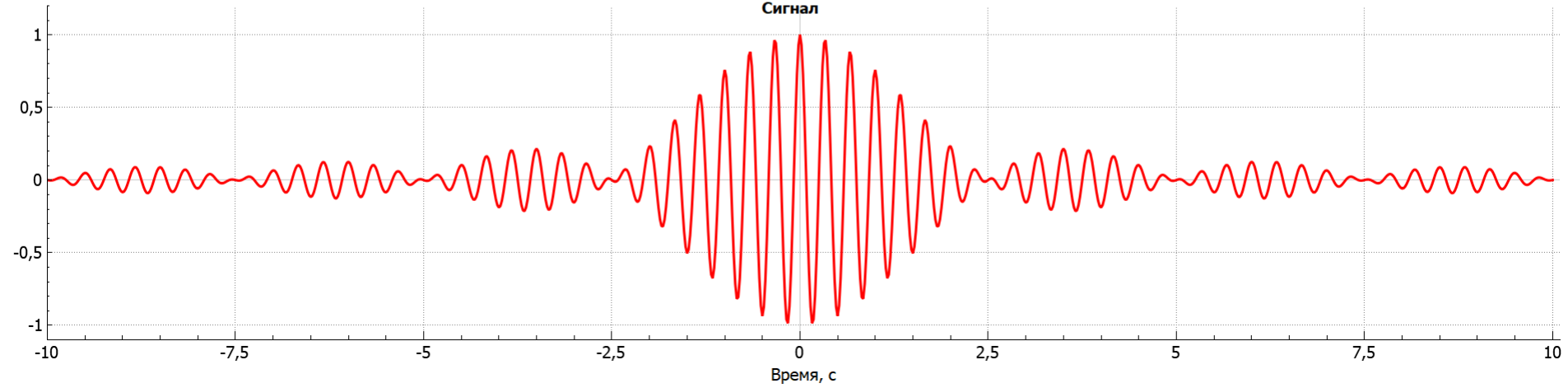


Радиоимпульс (видеоимпульс)

Спектр

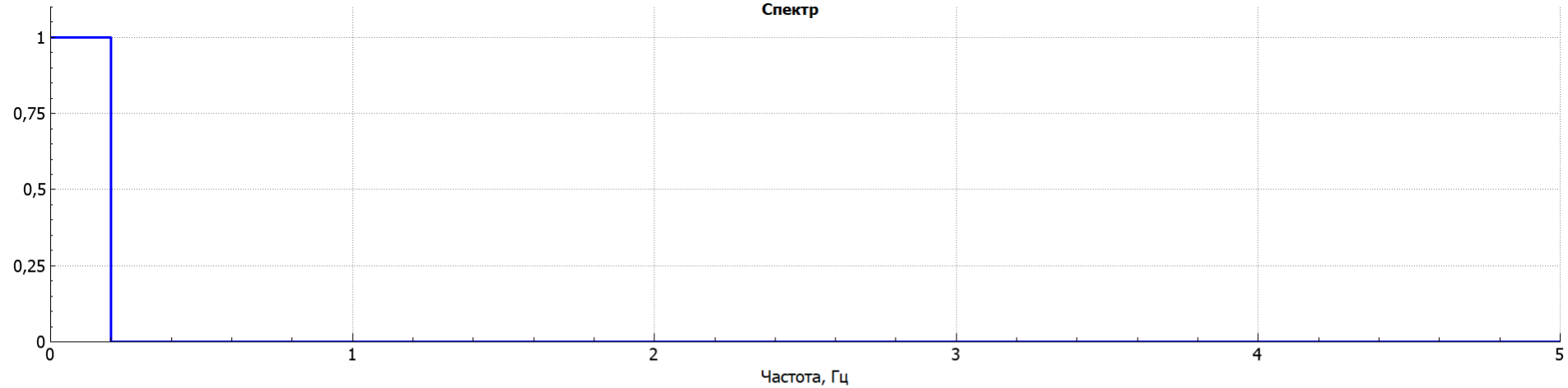


Сигнал

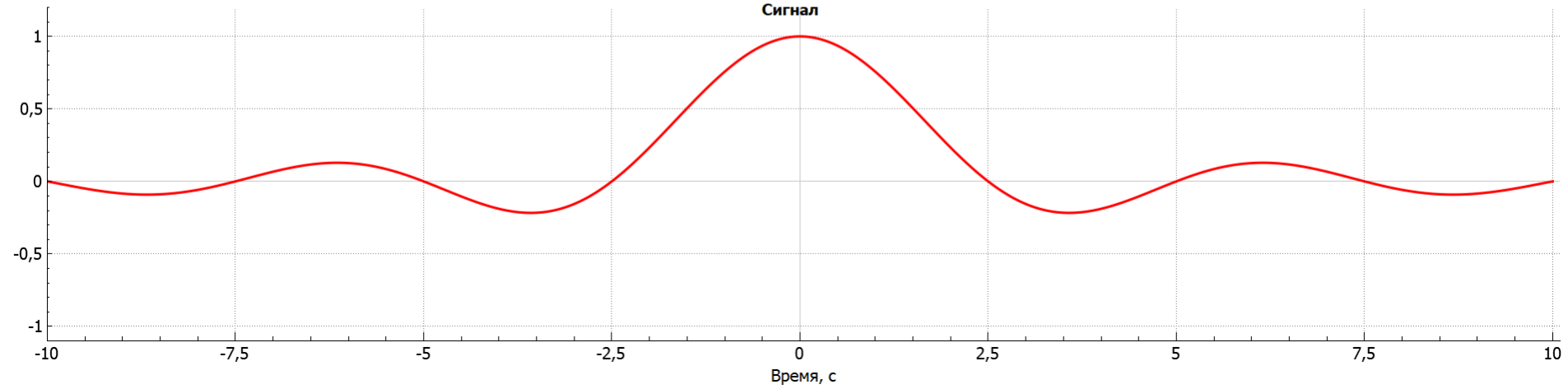


Радиоимпульс (видеоимпульс)

Спектр



Сигнал



Теорема Планшереля

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t) e^{-i\omega t} dt \quad \xi(t) = \int_0^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$P = C |\xi(t)|^2 \Rightarrow W = C \int_{-\infty}^{\infty} |\xi(t)|^2 dt$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t) \xi^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right] \left[\int_0^{\infty} S^*(\omega') e^{-i\omega' t} d\omega' \right] dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} S(\omega) S^*(\omega') e^{i(\omega - \omega')t} d\omega d\omega' \right] dt = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} S(\omega) S^*(\omega') \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega')t} dt \right] d\omega d\omega' = \\ &= \left\| \delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt \right\| = 2\pi \int_0^{\infty} S(\omega) \left[\int_0^{\infty} S^*(\omega') \delta(\omega - \omega') d\omega' \right] d\omega = \int_0^{\infty} 2\pi |S(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\xi(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} 2\pi |S(\omega)|^2 d\omega$$

$$G(\omega) = 2\pi |S(\omega)|^2$$

Энергия во временном и спектральном представлениях

$\tau(\varepsilon)$ – оценка длительности импульса при заданном ε

$\Delta(\varepsilon)$ – оценка ширины спектра при заданном ε

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \frac{\int_{-\tau/2}^{\tau/2} |\xi(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |\xi(t)|^2 dt} \\ \varepsilon = \frac{\int_0^{\Delta} |S(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega} \end{array} \right.$$

Оценка длительности импульса и ширины спектра

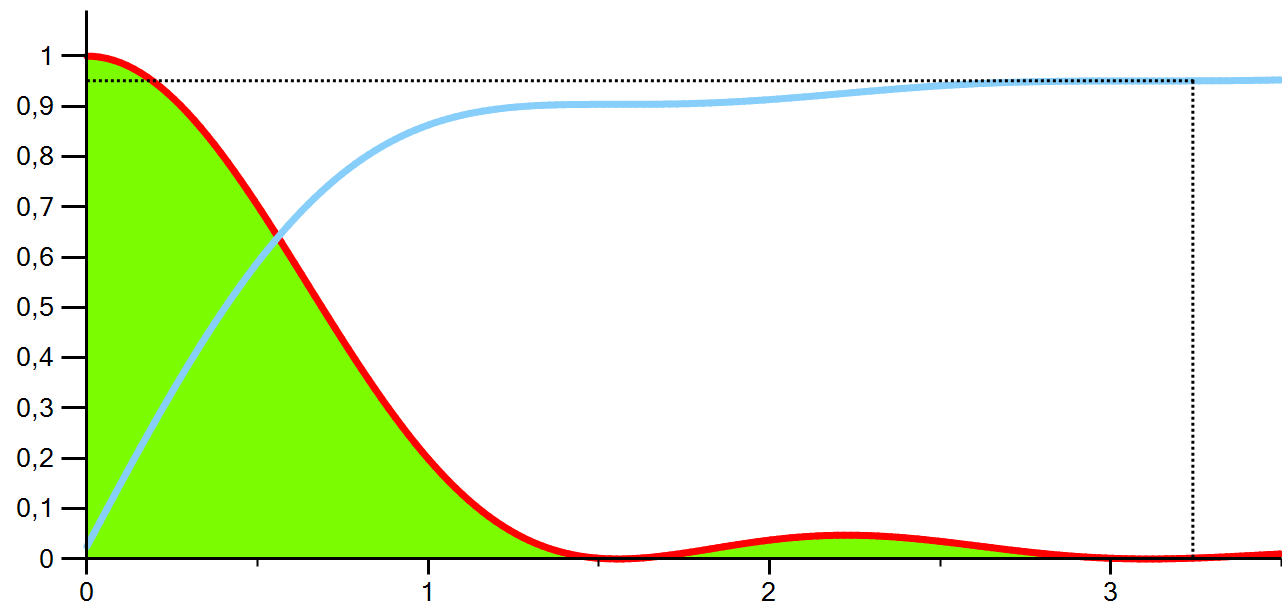
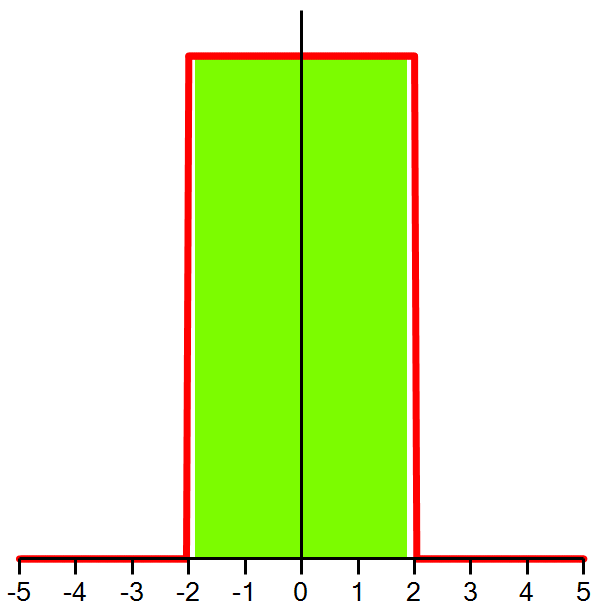
Оценка длительности импульса и ширины спектра

Импульс:

$\varepsilon(\Delta) =$

Импульс $u(t)$

Спектральная плотность мощности $|S(\omega)|^2$



Время t , с

Круговая частота ω , рад/с

Δ , рад/с

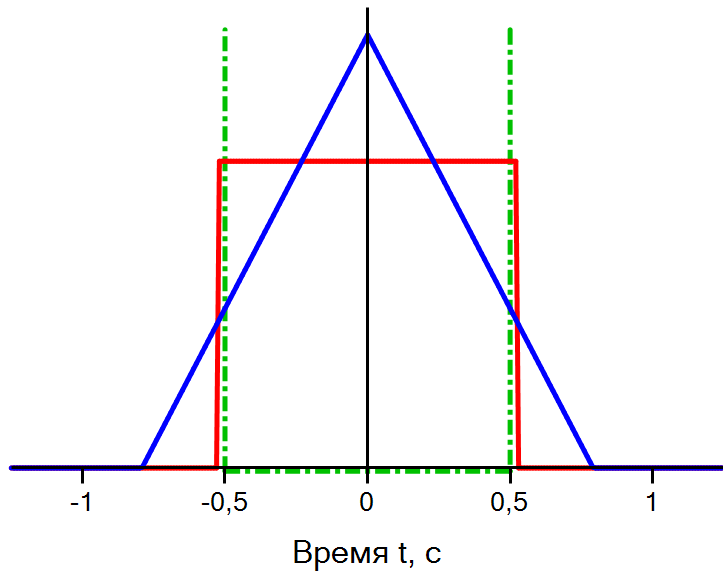
Оценка длительности $\tau =$ и ширины спектра $\Delta =$

$\tau \Delta = 12,32$

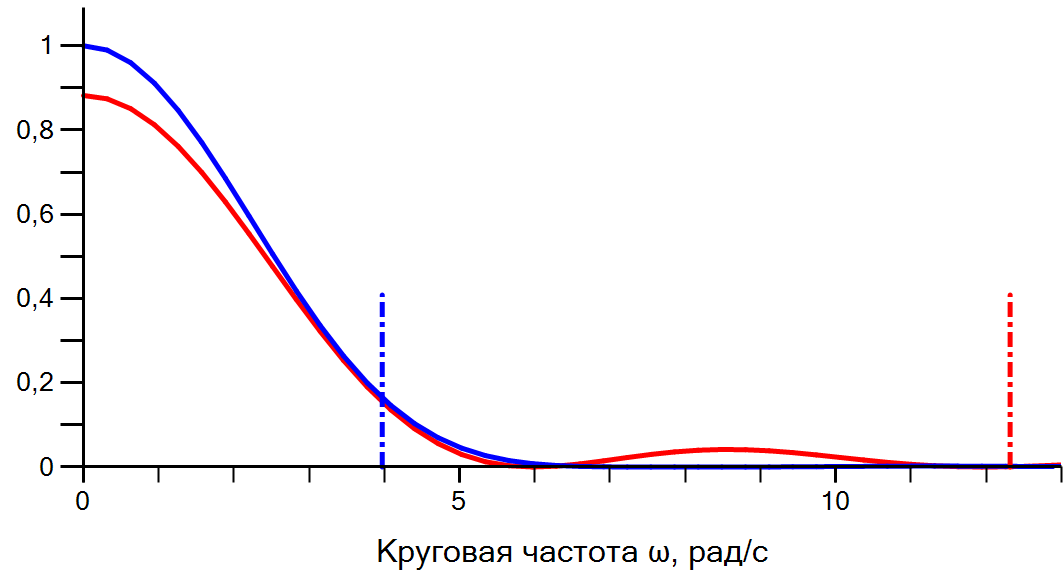
Спектры импульсов разной формы при равной энергии

Сравнить импульсы: **прямоугольный** · **треугольный** · Длительность всех импульсов по энергии $\tau = 1$ с при $\varepsilon = 0,95$

Импульс $u(t)$



Спектральная плотность мощности $|S(\omega)|^2$



Ширина спектра $\Delta = 12,32$ рад/с $\Delta = 3,97$ рад/с

Меню

Выход