Лекция 6
Введение в статфизику

Статистическая физика

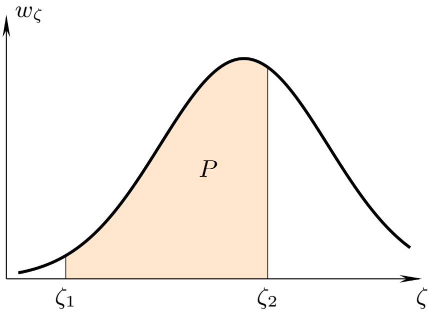
предсказывает свойства **макроскопических** систем
на основе методов математической статистики

рассматривает микроскопические параметры частиц системы,
полагая их **случайными величинами**

является наукой **теоретической**
восходит от абстрактного к конкретному

Случайные величины для физиков

«случайность» величины ζ мы будем понимать интуитивно



$$P(\zeta \in [\zeta_1;\zeta_2]) = \int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2} w(\zeta)d\zeta$$

- Случайная величина принимает разные значения от измерения к измерению
- $w(\zeta)$ или w_ζ — ф-ция плотности вероятности (PDF). Помимо нахождения вероятностей, ее еще используют для определения средних значений (матожиданий):

$$\mathrm{E}[f(\zeta)] \equiv \langle f(\zeta)\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) w_\zeta d\zeta$$

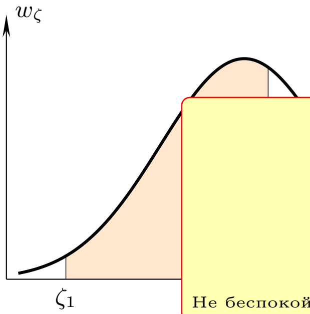
- Два важных частных случая:

среднее: $\langle \zeta \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \zeta w_\zeta d\zeta$

дисперсия: $\sigma_\zeta^2 = \left\langle (\zeta - \langle\zeta\rangle)^2 \right\rangle = \left\langle \zeta^2 \right\rangle - \langle\zeta\rangle^2 > 0$

Случайные величины для физиков

«случайность» величины ζ мы будем понимать интуитивно



$$P(\zeta \in [\zeta_1; \zeta_2]) = \int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2} w(\zeta) d\zeta$$

- Случайная величина принимает разные значения от измерения к измерению
- $w(\zeta)$ или w_ζ — ф-ция плотности вероятности (PDF).

...еще используют

...атожиданий):

и не забудь про нормировку!

$$\langle 1 \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} w_\zeta d\zeta = 1$$

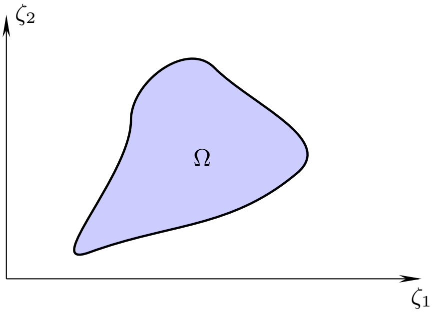
Не беспокойся, куда-нибудь ты обязательно попадешь, — сказал Кот

среднее: $\langle \zeta \rangle = \int\limits_{-\infty} \zeta w_\zeta d\zeta$

дисперсия: $\sigma_\zeta^2 = \left\langle (\zeta - \langle \zeta \rangle)^2 \right\rangle = \left\langle \zeta^2 \right\rangle - \langle \zeta \rangle^2 > 0$

Случайные величины для физиков

с наборами случайных величин $X = (\zeta_1, \ldots, \zeta_N)$ мы работаем аналогично



$$P(X \in \Omega) = \int\limits_{\Omega} w(X) dX$$

не «объем» Ω !!!

- $w(X)$ или w_X — многомерная PDF
- Можно исключить из рассмотрения одну из величин

Для этого $w(X)$ надо проинтерировать по ней:

$$w(\zeta_1, \zeta_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} w(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) d\zeta_3$$

маргинальная плотность

- Средние считаются аналогично:

$$\langle f(X) \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(X) w_X dX$$

- Вместо дисперсий — ковариационная матрица:

$$K_{ij} = K_{ji} = \langle X_i X_j \rangle - \langle X_i \rangle \langle X_j \rangle$$

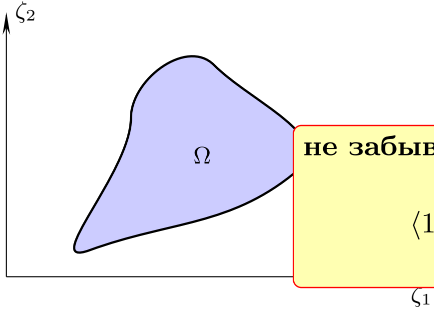
- Если величины из X статистически независимы, то

K_{ij} — диагональная матрица, а $w(X)$ факторизуется:

$$w_X = \prod_{i=1}^{N} w_{X_i}$$

Случайные величины для физиков

с наборами случайных величин $X = (\zeta_1, ..., \zeta_N)$ мы работаем аналогично



- $w(X)$ или w_X — многомерная PDF
- Можно исключить из рассмотрения одну из величин
Для этого $w(X)$ надо проинтерировать по ней:

∞ … $)d\zeta_3$

маргинальная плотность

не забываем про нормировку!

$$\langle 1 \rangle = \int\limits_{\infty} w_X dX = 1$$

…ично:

- Вместо дисперсий — ковариационная матрица:

$$K_{ij} = K_{ji} = \langle X_i X_j \rangle - \langle X_i \rangle \langle X_j \rangle$$

$$P(X \in \Omega) = \int\limits_{\Omega} w(X) dX$$

не «объем» Ω !!!

- Если величины из X статистически независимы, то K_{ij} — диагональная матрица, а $w(X)$ факторизуется:

$$w_X = \prod_{i=1}^{N} w_{X_i}$$

Примеры случайных физических величин

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА (1860)

Проекции скорости частицы, взятые в разные моменты времени
или у случайно выбранной частицы

$$w(v_x, v_y, v_z) = \frac{1}{Z_K} \exp\left(-\frac{m\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)}{2kT}\right)$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬЦМАНА (1870)

Координаты частицы, взятые в разные моменты времени
или у случайно выбранной частицы

$$w(x, y, z) = \frac{1}{Z_\Pi} \exp\left(-\frac{\Pi(x, y, z)}{kT}\right),$$ где $\Pi(x, y, z)$ — потенциальная энергия

КАНОНИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГИББСА (1902)

Набор всех обобщенных координат и импульсов $X = (\mathbf{q}..., \mathbf{p}...)$ всех частиц в куске вещества

$$w(X) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{\mathcal{H}(X)}{kT}\right),$$ где $\mathcal{H}(X)$ — гамильтониан (что??)

Распределение Максвелла

технически, это тройной Гаусс

$$w(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2kT}\right)$$

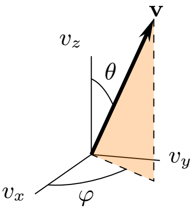
- Все компоненты скорости распределены одинаково и независимо:

$$w(\mathbf{v}) = w(v_x)w(v_y)w(v_z)$$

$$w(v_i) = \mathcal{N}(0,\sigma^2),\text{ где } \sigma^2 = kT/m.\text{ В частности } \langle v_i^2\rangle = kT/m$$

- Очень просится переход от декартовых проекций к «модуль-направлению»:

$$\mathbf{v} = v(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$$



Вероятность неизменна: $w(v_x,v_y,v_z)|dv_x dv_y dv_z| = w(v,\theta,\varphi)|dv d\theta d\varphi|$, поэтому

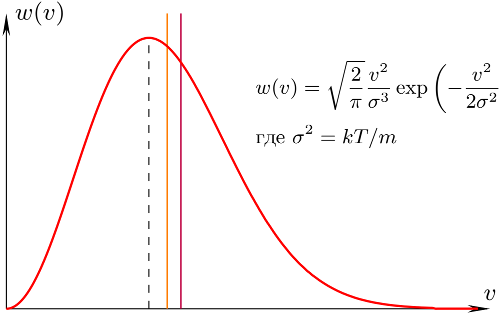
$$w(v,\theta,\varphi) = w(v_x,v_y,v_z)\left|\frac{\partial(v_x,v_y,v_z)}{\partial(v,\theta,\varphi)}\right| = \frac{v^2\sin\theta}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}\exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right)$$

Проинтегрируем по углам: $w(v) = \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} w_{v\theta\varphi}\,d\theta d\varphi = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{v^2}{\sigma^3}\exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right)$

Распределение Максвелла

технически, это тройной Гаусс

$$w(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{\quad}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{\quad}\right)$$



$$w(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{v^2}{\sigma^3}\exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right)$$

где $\sigma^2 = kT/m$

$v_{\max} = \sigma\sqrt{2}$ $\qquad \langle v\rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\sigma$ $\qquad \langle v^2\rangle = 3\sigma^2$

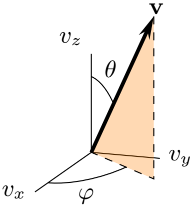
- Все компоненты с

$$w(\mathbf{v}) =$$

$$w(v_i)$$

- Очень просится п ... ию»:

$$\mathbf{v} = v($$



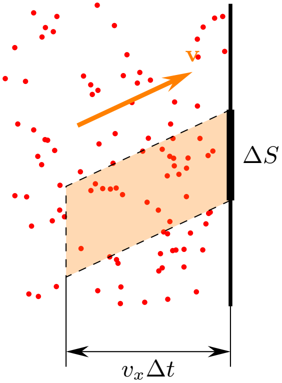
Вероятность неизме ... ому

$$w(v,\theta,$$

Проинтегрируем по

$$\int_0 \int_0$$

Давление идеального газа



Рассмотрим площадку ΔS на стенке сосуда с газом внутри.
Рассмотрим молекулы со скоростью $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$.
Из них за время Δt до стенки долетят молекулы,
находящиеся в подсвеченном объеме $\Delta V = v_x \Delta t \Delta S$

Их число $dN_{\mathbf{v}} = n\Delta V w(\mathbf{v}) dv_x dv_y dv_z$, где n — концентрация.
все молекулы × доля со скоростью $\mathbf{v}$

При столкновении x-импульс меняется с mv_x на $-mv_x$.
Импульс, переданный этими молекулами, равен $2mv_x \cdot dN_{\mathbf{v}}$:

$$dp_{x,\mathbf{v}} = 2nm\Delta S\Delta t \cdot v_x^2 w(\mathbf{v}) dv_x dv_y dv_z$$

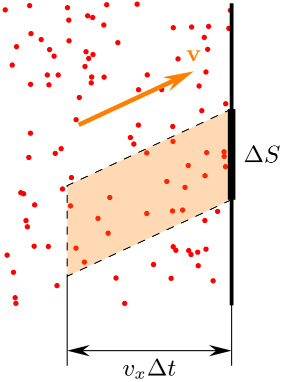
Полный переданный импульс найдем, проинтегрировав
по v_y и v_z от $-\infty$ до ∞ и по v_x от 0 до ∞.

Поскольку $w(\mathbf{v}) = w(v_x)w(v_y)w(v_z)$, интеграл распадается на произведение трех, причем интегралы по v_y и v_z дают 1 (нормировка). В итоге, учитывая четность $w(v_x)$

$$\Delta p_x = 2nm\Delta S\Delta t \int_0^\infty v_x^2 w(v_x) dv_x = nm\Delta S\Delta t \left\langle v_x^2 \right\rangle \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{p} = \frac{\Delta p_x}{\Delta t \Delta S} = nm\left\langle v_x^2 \right\rangle = nkT}$$

уравнение состояния идеального газа

Статистика истечения из отверстия



Пусть теперь газ истекает из отверстия площадью ΔS.
Число вылетевших молекул со скоростью $\mathbf{v}$:

$$dN_{\mathbf{v}} = n\Delta S v_x \Delta t \cdot w(\mathbf{v}) dv_x dv_y dv_z$$

Найдем полное число вылетающих молекул интегрированием по v_y и v_z от $-\infty$ до ∞ и по v_x от 0 до ∞:

$$\Delta N = n\Delta S\Delta t \int\limits_0^\infty v_x w(v_x) dv_x = n\Delta S\Delta t \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} = n\Delta S\Delta t \frac{\langle v\rangle}{4}$$

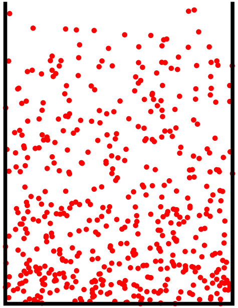
Это нормировочная константа для вылетающих молекул:

$$\boxed{w_{\text{out}}(\mathbf{v}) = \frac{dN_{\mathbf{v}}}{\Delta N \cdot dv_x dv_y dv_z} = \sqrt{2\pi}\frac{v_x}{\sigma} w(\mathbf{v})}$$

Перейдем к языку «модуль-направление», но угол θ будем отсчитывать от оси Ox:

$$w_{\text{out}}(v,\theta,\varphi) = v^2 \sin\theta \cdot w_{\text{out}}(\mathbf{v}) = \frac{\sin 2\theta}{4\pi}\frac{v^3}{\sigma^4}\exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{w_{\text{out}}(v) = \frac{v^3}{2\sigma^4}\exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right)}$$

Простейшее распределение Больцмана



$$w(z) = \frac{1}{z_0} \exp\left(-\frac{z}{z_0}\right)$$

Рассмотрим газ в прямом стакане «без крышки».
Потенциальная энергия молекулы газа в поле тяжести $\Pi(z) = mgz$.
Соответственно, распределение для координат (x, y, z) имеет вид

$$w(x,y,z) = \frac{1}{Z_\Pi} \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) \equiv \frac{1}{Z_\Pi} \exp\left(-\frac{z}{z_0}\right), \text{ где } z_0 = \frac{kT}{mg}$$

Координаты x и y распределены равномерно, интеграл по ним дает умножение на площадь стакана S:

$$w(z) = \frac{S}{Z_\Pi} \exp\left(-\frac{z}{z_0}\right), \text{ причем } 1 = \int_0^\infty w(z)dz = \frac{z_0 S}{Z_\Pi}$$

Среднее значение: $\langle z \rangle = z_0$, **дисперсия:** $\sigma_z^2 = z_0^2$.

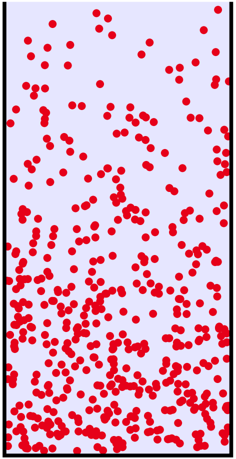
Если в сосуде всего N частиц, то в маленьком объеме ΔV находится $\Delta N = Nw(x,y,z)\Delta V$.

Следовательно, локальная концентрация $n(x,y,z) = \dfrac{\Delta N}{\Delta V} = Nw(x,y,z)$.

Концентрация экспоненциально убывает с высотой, если считать $T = \text{const}$.
При этом p $\sim n$ и также экспоненциально убывает с высотой (барометрическая формула).

Измерение постоянной Больцмана

Опыты Перрена (1908, нобелевская премия в 1926)



• Частицы со средним диаметром d и плотностью ρ взвешены в жидкости с чуть меньшей плотностью ρ_0. На частицы действует не только сила тяжести, но и сила Архимеда:

$$ma_z = mg - \rho_0 gV \quad \Rightarrow \quad a_z = g\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)$$

• Частицы во много раз тяжелее молекул, но за счет силы Архимеда создаются условия практически нулевой плавучести, в которых уже проявляется статистика Больцмана:

$$n(x,y,z) \sim w(x,y,z) \sim \exp\left(-\frac{ma_z z}{kT}\right)$$

• Измерям зависимость $n(z)$, линеаризуем и находим к-т наклона:

$$\ln n(z) = -\frac{ma_z}{kT} z + \text{const}, \text{ если } \alpha \equiv \frac{ma_z}{kT}, \text{ то } k = \frac{ma_z}{\alpha T}$$

описанный эксперимент является частью опытов Перрена,
в которых k определялась из анализа броуновского движения