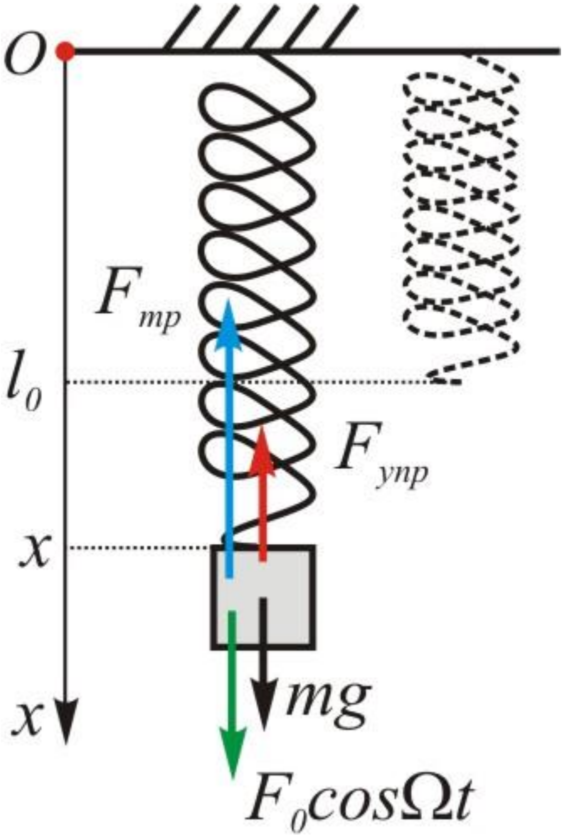
Механизмы возникновения волновых процессов



$$mg - k(x - l_0) - \lambda \dot{x} + F_0 \cos \Omega t = m\ddot{x} \Rightarrow$$

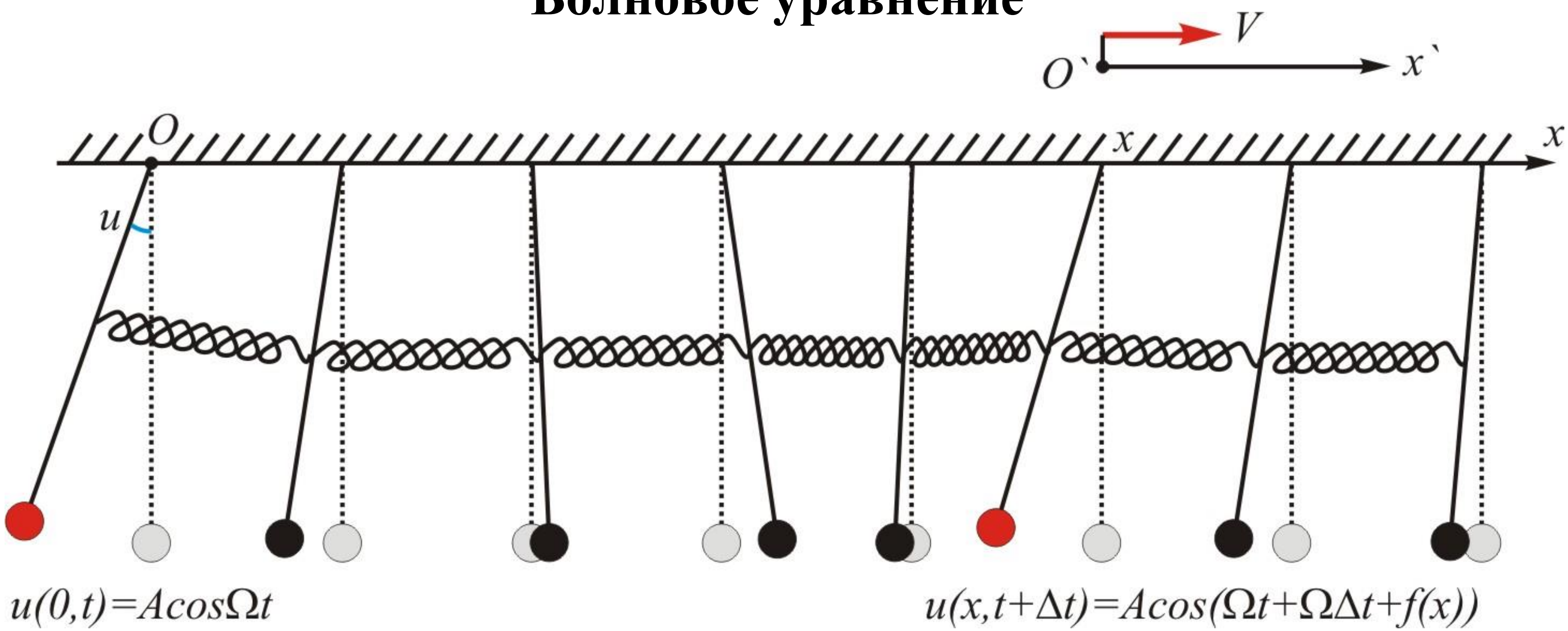
$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\frac{\lambda}{2m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = g + \frac{kl_0}{m} + \frac{F_0}{m}\cos \Omega t$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t$$

$$x = x_0 \cos\left(\Omega t + \varphi\right)$$

$$x_0 = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\Omega^2\delta^2}}, \quad tg\varphi = \frac{2\Omega\delta}{\Omega^2 - \omega_0^2}$$

Волновое уравнение



$$f(x) = -\Omega\Delta t = -\Omega\frac{x}{V} = -kx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x,t) = A\cos\left(\Omega\left[t - \frac{x}{V}\right]\right) = A\cos(\Omega t - kx)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Волновое уравнение для цепочки связанных осцилляторов

$$\begin{cases} W_{пот} = \dfrac{\beta}{2}\sum\left(\xi_{j-1}-\xi_j\right)^2 = \dfrac{\beta}{2}\left\{\ldots+\left(\xi_{j-1}-\xi_j\right)^2+\left(\xi_j-\xi_{j+1}\right)^2+\ldots\right\} \\ W_{кин} = \dfrac{m}{2}\sum\dot{\xi}_j^2 \\ L = W_{кин} - W_{пот} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\xi}_j} - \dfrac{\partial L}{\partial\xi_j} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m\ddot{\xi}_j - \beta\left(\xi_{j-1}-2\xi_j+\xi_{j+1}\right) = 0$$

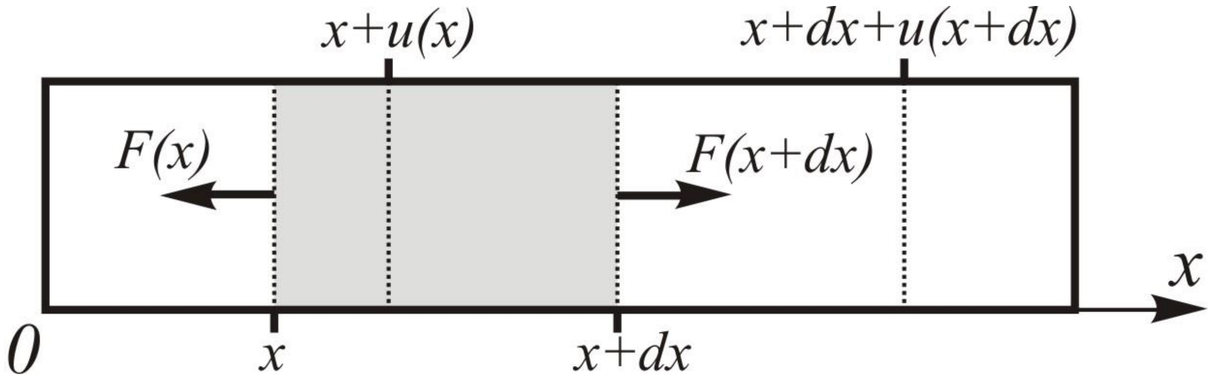
$$\ddot{\xi}_j - \frac{\beta}{m}\Delta^2\xi_j = 0$$

$$\ddot{\xi}_j - \frac{\beta(\Delta x)^2}{m}\frac{\Delta^2\xi_j}{(\Delta x)^2} = 0$$

$$\beta\frac{(\Delta x)^2}{m} = \frac{ES}{\Delta x}\frac{(\Delta x)^2}{m} = \frac{E}{m/(S\Delta x)} = \frac{E}{\rho} = V^2$$

$$\ddot{\xi}_j - V^2\frac{\Delta^2\xi_j}{(\Delta x)^2} = 0$$

Звуковые волны в твёрдых телах



$$\mu = -\frac{\Delta d}{d}\cdot\frac{l}{\Delta l}$$

$$\begin{cases} \rho S dx \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = SE(\varepsilon(x+dx)-\varepsilon(x)) \\ \varepsilon(x) = \dfrac{\Delta l}{l} = \dfrac{\{[x+dx+u(x+dx)]-[x+u(x)]\}-dx}{dx} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E\dfrac{d\varepsilon}{dx} \\ \varepsilon(x) = \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow$$

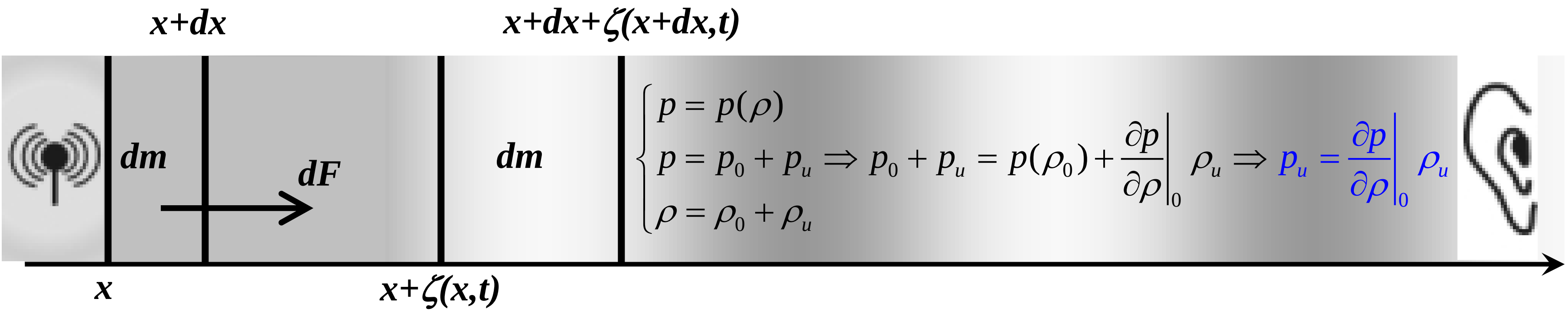
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,\ V = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Скорости продольной (P) и поперечной (S) волн в однородных твёрдых телах (μ – коэффициент Пуассона)

$$V_P = \sqrt{\frac{(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\frac{E}{\rho}}$$

$$V_S = \sqrt{\frac{1}{2(1+\mu)}\frac{E}{\rho}}$$

Звуковые волны в газах



$$\begin{cases} dm = \rho_0 S dx = \rho S\left[dx + \zeta(x+dx,t) - \zeta(x,t)\right] \\ dF = S\left[p(x,t) - p(x+dx,t)\right] = -S\dfrac{\partial p_u}{\partial x}dx \\ dF = \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} dm \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho_u = -\rho_0 \dfrac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \rho_0 \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial p_u}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \dfrac{1}{V^2}\dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0, \\ V^2 = \left.\dfrac{\partial p}{\partial \rho}\right|_0 \end{matrix}$$

$$p\rho^{-\gamma} = p_0 \rho_0^{-\gamma} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial \rho} = \gamma \rho^{\gamma-1} p_0 \rho_0^{-\gamma} = \frac{\gamma p}{\rho} \Rightarrow V^2 = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_0 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{\gamma RT}{\mu}$$

$$\text{При } 25^\circ C: \; V = 346 \text{ м/с}$$

Электромагнитные волны (свет)

$$
\begin{cases}
rot\vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\[2ex]
rot\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\[2ex]
div\vec{D} = \rho \\[1ex]
div\vec{B} = 0
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
rot\,\dfrac{\vec{B}}{\mu_0\mu} = 0 + \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\varepsilon\vec{E}\right) \\[2ex]
rot\,rot\vec{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\,rot\vec{B} \\[2ex]
div\left(\varepsilon_0\varepsilon\vec{E}\right) = 0 \\[1ex]
div\vec{B} = 0
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
rot\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\[2ex]
-\nabla^2\vec{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\,rot\vec{B} \\[2ex]
div\vec{E} = 0 \\[1ex]
div\vec{B} = 0
\end{cases}
$$

$$
\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial\vec{r}^{\,2}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu}
$$

Решение волнового уравнения

Разные типы волн имеют сходное математическое описание
за счёт сходства исходных физических законов,
что приводит к одному волновому уравнению.

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

$$\Downarrow$$

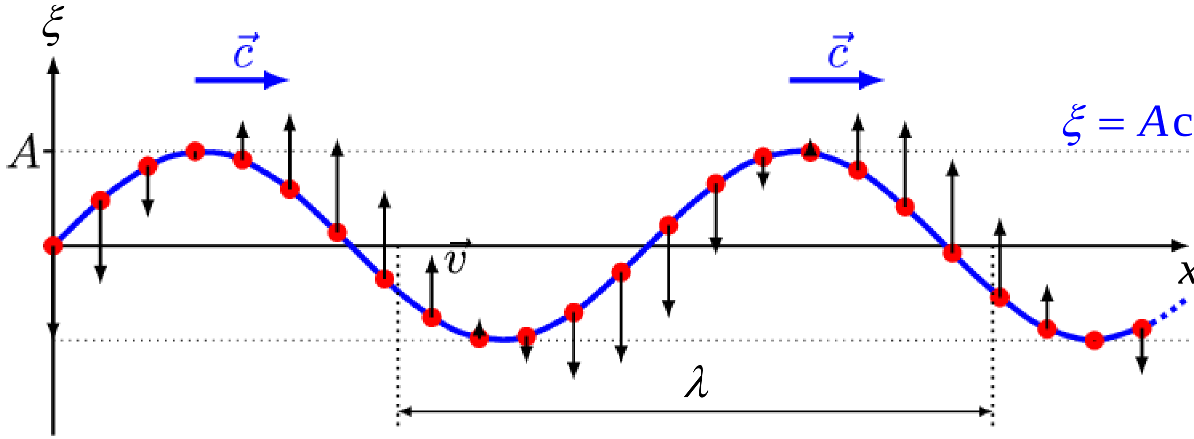
$$\xi = \xi(x \pm Vt)$$

Волны - определение

Волна *– распространение возмущений в пространстве.*

(Wikipedia: изменение некоторой совокупности физических величин (характеристик поля или материальной среды), которое способно перемещаться, удаляясь от места своего возникновения, или колебаться внутри ограниченных областей пространства.)

Основные параметры волнового процесса



$$\xi = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Фаза (φ) – аргумент периодической функции в законе изменения рассматриваемой переменной.

$$\varphi = \omega t - kx + \varphi_0$$

Фронт волны (волновой фронт) – поверхность равной фазы в данный момент времени.

$$\omega t_1 - kx + \varphi_0 = C_1 \qquad \Rightarrow x = const$$

Фазовая скорость волны (c) – скорость распространения волнового фронта.

$$d\varphi = 0 \;\Rightarrow\; \omega dt - kdx = 0 \;\Rightarrow\; c = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{k_0 n(\omega)}$$

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Длина волны (λ) – расстояние, которое проходит фронт волны за период.

$$\lambda = cT \Rightarrow k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Групповая скорость

Групповая скорость волны (*$V_{гр}$*) – скорость распространения огибающей волнового пакета

Волновой пакет – квазимонохроматический сигнал с узким спектром

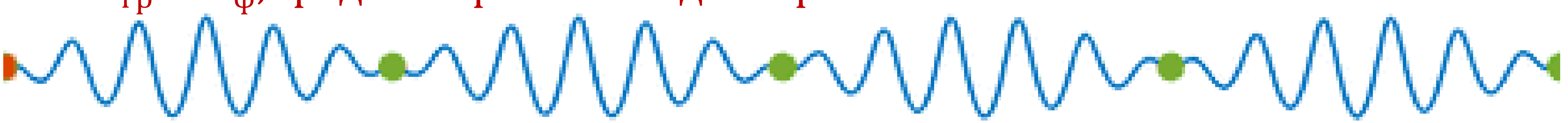
$$\xi = A\cos\left(\omega_1 t - k_1 x\right) + A\cos\left(\omega_2 t - k_2 x\right) =$$

$$= 2A\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t - \frac{k_2 - k_1}{2} x\right)\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t - \frac{k_2 + k_1}{2} x\right) =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \omega_2 - \omega_1 = d\omega \\ k_2 - k_1 = dk \end{matrix} \right\| = 2A\cos\left(\frac{1}{2}\left[td\omega - xdk\right]\right)\cos\left(\omega t - kx\right)$$

$$\boxed{V_{\text{гр}} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\text{огибающая}} = \frac{d\omega}{dk}}$$

$V_{\text{гр}} < V_{\text{ф}}$, среда с нормальной дисперсией



Групповая скорость

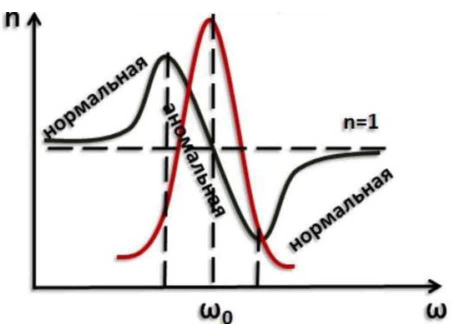
$$V_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{d\left(\frac{\omega}{V_{\text{ф}}(\omega)}\right)} = \frac{1}{\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega}{V_{\text{ф}}(\omega)}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{V_{\text{ф}}} - \frac{\omega}{V_{\text{ф}}{}^2}\frac{dV_{\text{ф}}(\omega)}{d\omega}} = \frac{V_{\text{ф}}}{1 - \frac{\omega}{V_{\text{ф}}}\frac{dV_{\text{ф}}(\omega)}{d\omega}}$$

$$\frac{dV_{\text{ф}}(\omega)}{d\omega} < 0 \qquad V_{\text{гр}} < V_{\text{ф}}$$

Нормальная дисперсия

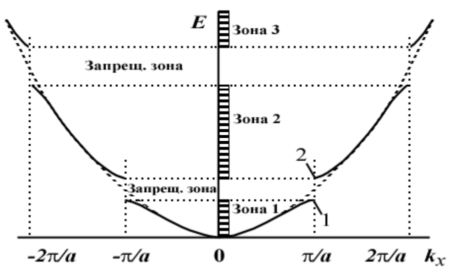
$$\frac{dV_{\text{ф}}(\omega)}{d\omega} > 0 \qquad V_{\text{гр}} > V_{\text{ф}}$$

Аномальная дисперсия



$$\frac{dV_{\text{ф}}(\omega)}{d\omega} > \frac{V_{\text{ф}}(\omega)}{\omega} \qquad V_{\text{гр}} < 0$$

Метаматериалы



$$\frac{dV_{\text{ф}}(\omega)}{d\omega} = \frac{V_{\text{ф}}(\omega)}{\omega} \qquad V_{\text{гр}} \to \infty$$

$$\frac{dV_{\text{ф}}(\omega)}{d\omega} \to \infty \qquad V_{\text{гр}} \to 0$$

$$\frac{dV_{\text{ф}}(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega}{k}\right) = \frac{1}{k} - \frac{\omega}{k^2}\frac{dk}{d\omega} \to \infty \qquad \frac{d\omega}{dk} \to 0$$

Частица как волновой пакет

Вычислим фазовую и групповую скорости электрона,
как волнового пакета с длиной волны де Бройля.

$$\lambda_{Де\,Бройля} = \frac{h}{p}$$

1. *Нерелятивистский случай.*

$$V_ф = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{W}{p} = \frac{p^2/2m}{p} = \frac{V}{2}$$

$$V_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dW}{dp} = \frac{d}{dp}\left(\frac{p^2}{2m}\right) = V$$

2. *Релятивистский случай.*

$$W = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad p = \frac{mV}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

$$V_ф = \frac{W}{p} = \frac{mc^2/\sqrt{1-V^2/c^2}}{mV/\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{c^2}{V}$$

$$V_{гр} = \frac{dW}{dp} = \frac{d}{dp}\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = \frac{2pc^2}{2W} = V$$

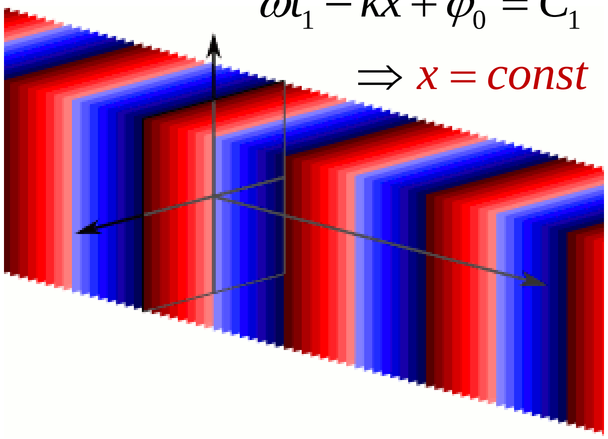
Скорость частицы
есть скорость перемещения огибающей волнового пакета!

Типы фронтов волн

$$\xi = A\cos\left(\omega t - kx + \varphi_0\right)$$

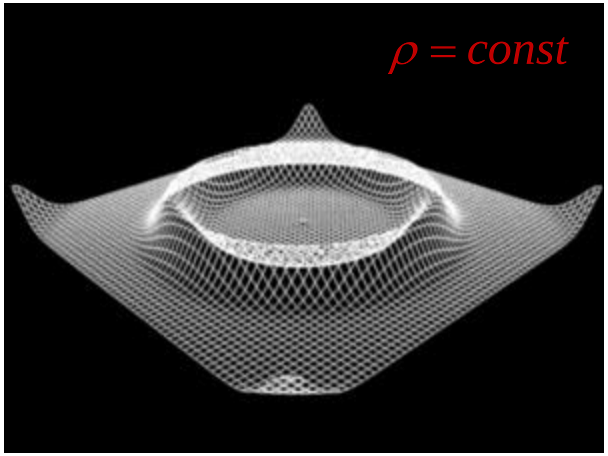
$$\omega t_1 - kx + \varphi_0 = C_1$$

$$\Rightarrow x = const$$



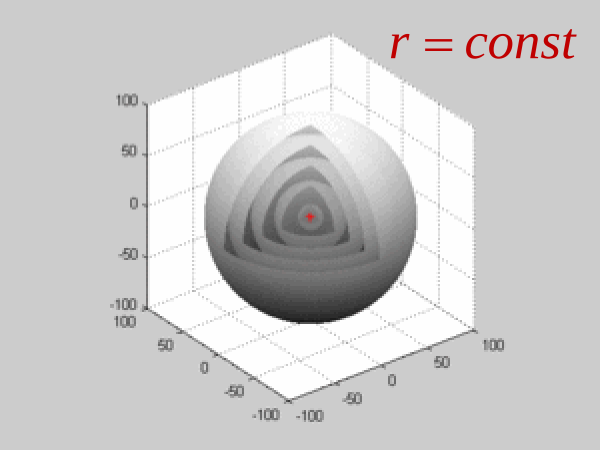
$$\xi = \frac{A}{\sqrt{\rho}}\cos\left(\omega t - k\rho + \varphi_0\right)$$

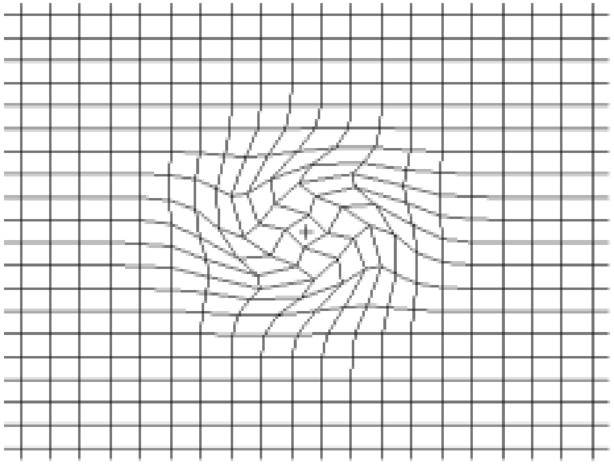
$$\rho = const$$



$$\xi = \frac{A}{r}\cos\left(\omega t - kr + \varphi_0\right)$$

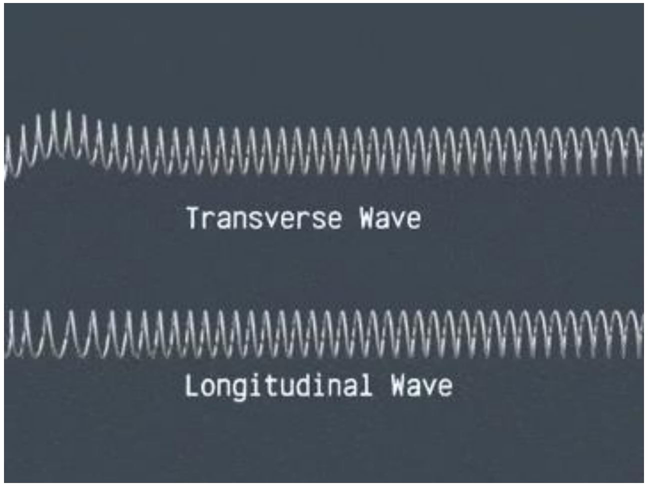
$$r = const$$

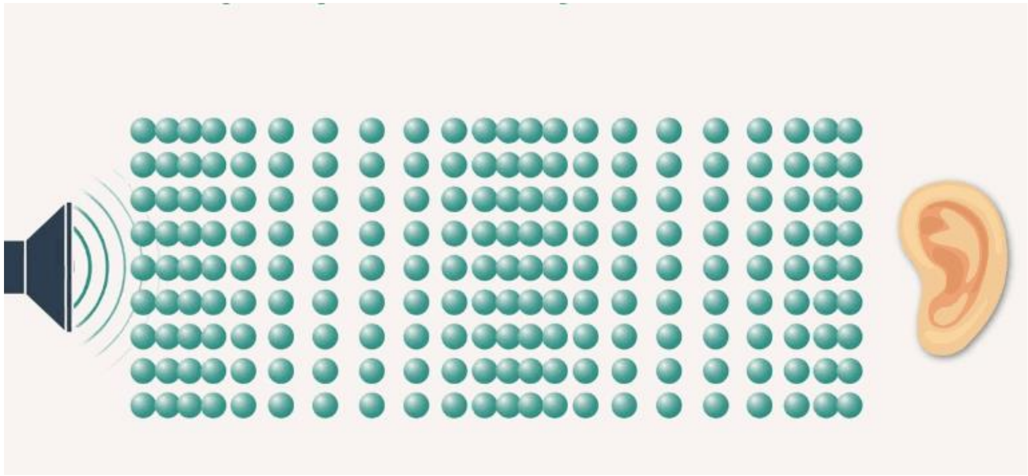




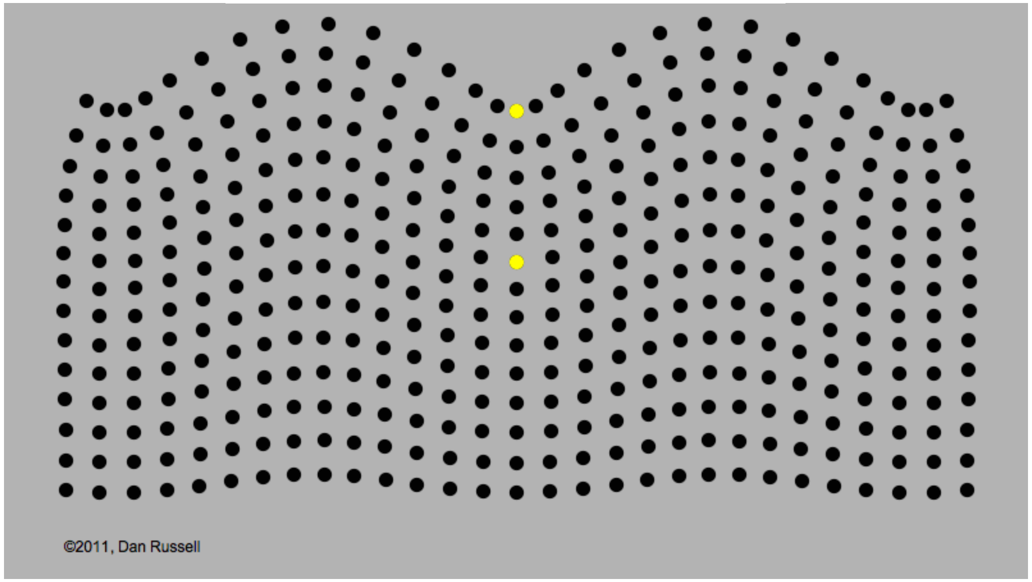
Спиральная волна

Продольные и поперечные волны



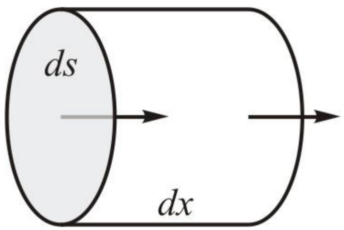


Волны на поверхности воды



Энергетические характеристики волн

W **– энергия**
w **– объёмная плотность энергии**
S **– плотность потока энергии**
I **– интенсивность волны**



$$w \equiv \frac{dW}{dv} = \frac{\rho_0 V_ч^2}{2} + \frac{E\varepsilon^2}{2} = \frac{\rho_0}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + V^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)$$

$$\vec{S} = \frac{dW}{dsdt}\vec{e} = w\vec{V}$$

$$I = \langle S \rangle = \langle w \rangle V = \frac{\rho_0 \omega^2 V u_0^2}{2}$$

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0\mu}$$

$$\vec{S} = \frac{dW}{dsdt}\vec{e} = w\vec{V}$$

$$I = \langle w \rangle V = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon V E_0^2}{2}$$

В частности, для плоской волны:

$$\left\| w = \frac{\rho_0}{2}\left(u_0^2\omega^2 + \frac{E}{\rho_0}u_0^2 k^2\right)\sin^2(\omega t - kx) = \frac{\rho_0}{2}(u_0^2\omega^2 + V^2 u_0^2 k^2)\sin^2(\omega t - kx) = \right.$$
$$\left. = \rho_0 u_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx);\ S = \rho_0 V u_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx) \right\|$$

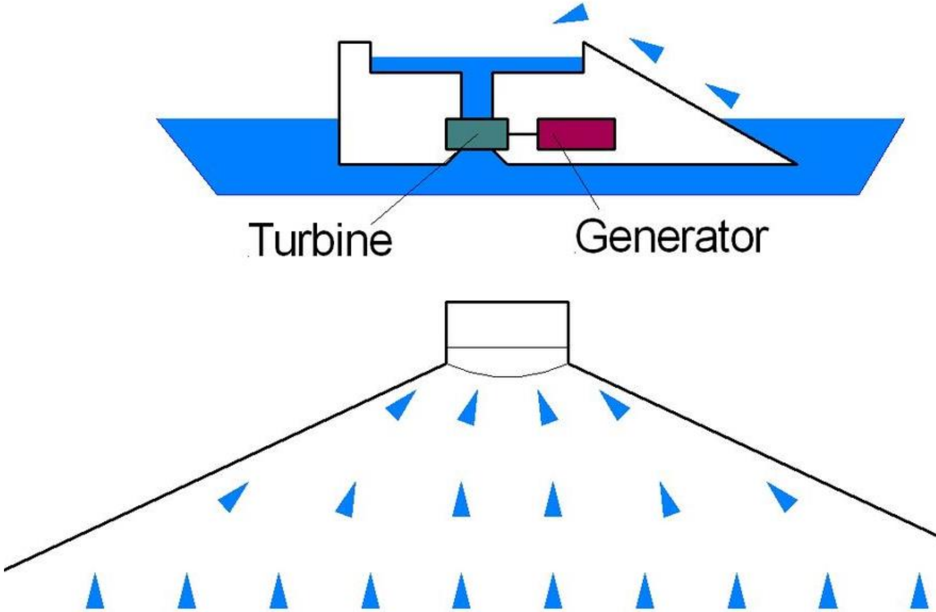
Применение волн на воде

Волны	Пример
механические	волны на воде

$$\begin{cases} H = 50\ м \\ h = 5\ м \end{cases} \Rightarrow w_{пот} = \rho g h \approx 50\ кДж/м^3,\ \ w_{кин} = \frac{\rho V^2}{2} = \frac{\rho g H}{2} \approx 250\ кДж/м^3$$

$$\tau \approx 10\ с \Rightarrow \begin{cases} P_{пот} \approx 50\ МВт \\ P_{кин} \approx 0,25\ ГВт \end{cases}$$

$$v \approx 10^4\ м^3 \Rightarrow \begin{cases} W_{пот} \approx 500\ МДж \\ W_{кин} \approx 2,5\ ГДж \end{cases}$$

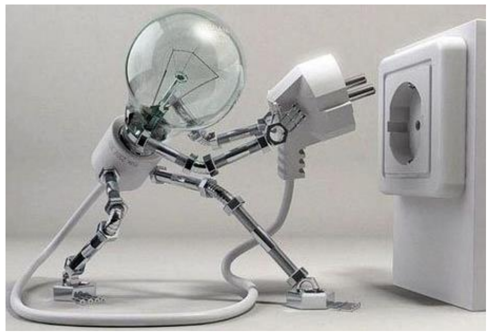


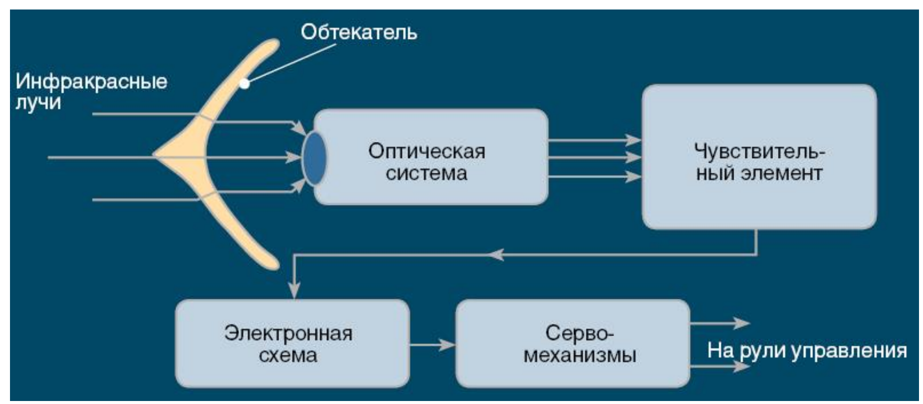
Применения звуковых волн

Волны	Пример
звуковые	**акустическая левитация**

1. Построение виртуальных «голографических» изображений в реальном времени.
2. Медицина (перемещение объектов внутри организма).
3. Захват объектов в космосе.
4. Левитация в транспортных целях.

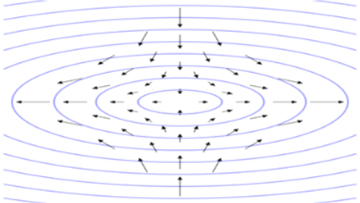
Применения электромагнитных волн



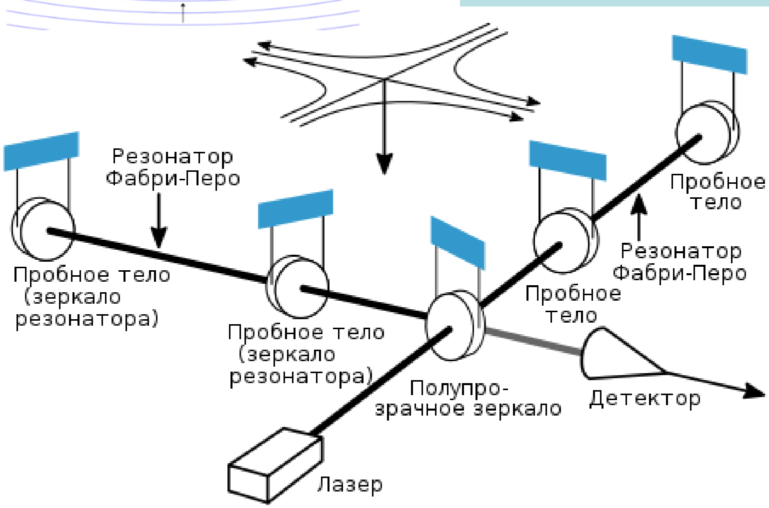


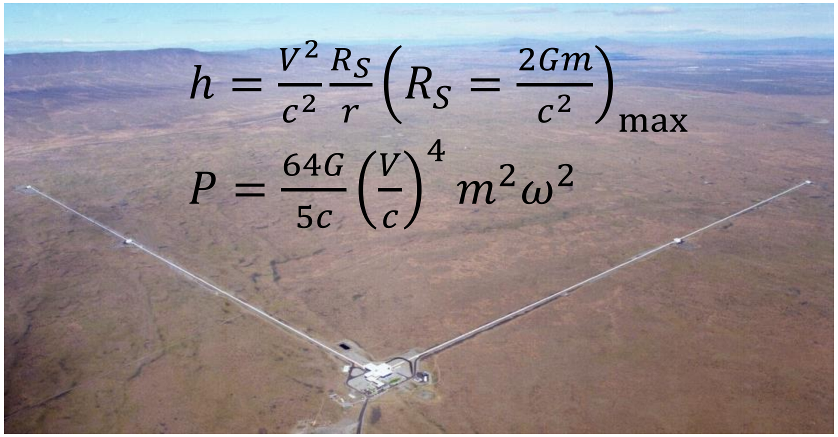
Волны	Пример
электромагнитные	ИК-пульты, ИК обогреватели, подсветка в системах наведения, СВЧ печи, сотовая связь, розетки 220 В

Гравитационные волны (LIGO)



$$\frac{\Delta d}{d} = -\frac{h}{2}\cos 2\theta$$





$$h = \frac{V^2}{c^2}\frac{R_S}{r}\left(R_S = \frac{2Gm}{c^2}\right)_{\max}$$

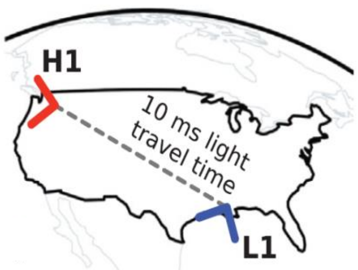
$$P = \frac{64G}{5c}\left(\frac{V}{c}\right)^4 m^2\omega^2$$

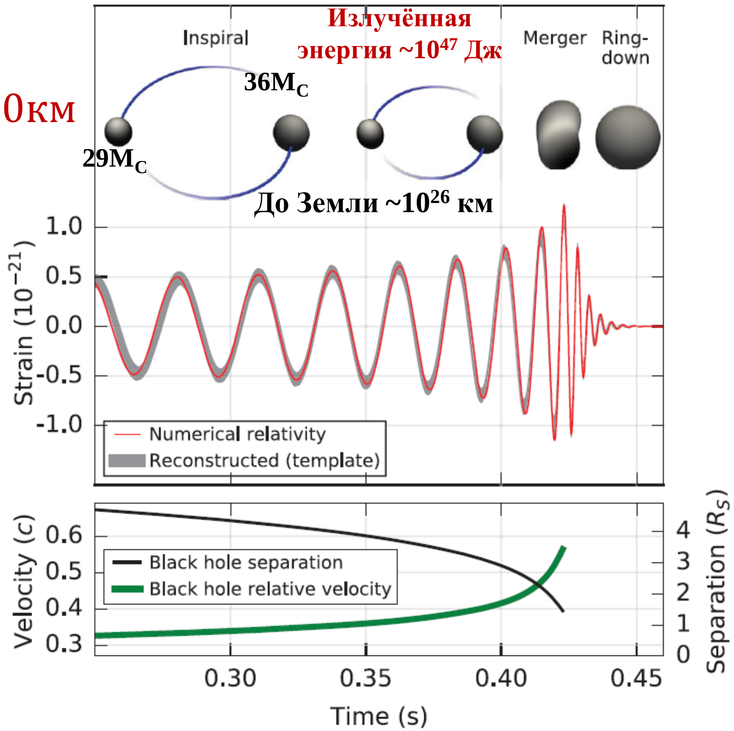
$$\Delta\varphi = \omega\cdot\tau_з = \omega\cdot\left[\frac{2L}{c}\left(1+\frac{h}{2}\right) - \frac{2L}{c}\left(1-\frac{h}{2}\right)\right] = \frac{\omega\cdot 2L}{c}\cdot h = 2\pi\cdot h\cdot\frac{L}{\lambda}$$

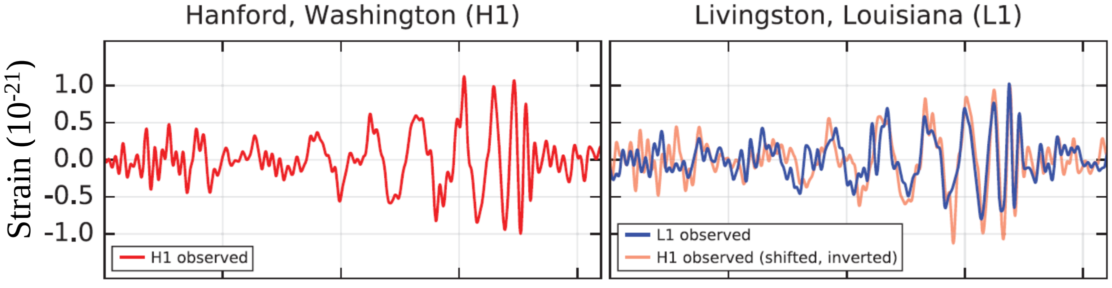
B.P. Abbott et al., Observation of gravitational waves from a binary black hole merger, Phys. Rev. Lett. ***116****, 061102, 2016.*

$$\nu \sim 40\text{Гц}$$

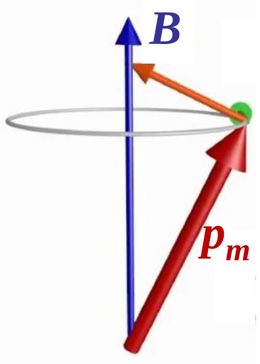
$$\lambda = \frac{c}{\nu} \sim 7500\text{км}$$







Применения спиновых волн



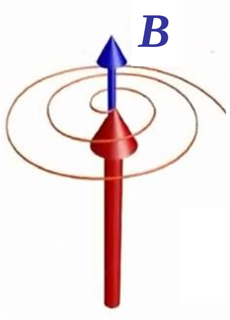
$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_F \\ \vec{M}_F = [\vec{p}_m, \vec{B}] \\ \vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{M}}{dt} = -\gamma\left[\vec{M}, \vec{B}_{eff}\right] + \vec{\alpha}}$$

$\gamma = \dfrac{e}{2m_e} g$ – *гиромагнитное отношение*

g – *параметр Ланде*

$\vec{\alpha}$ – *затухание*



$$\begin{cases} \vec{L} = \vec{n} mRV = -mR\dfrac{2\pi Ri}{e}\vec{n} = -\dfrac{2m}{e}\vec{p}_m \\ \dfrac{d\vec{p}_m}{dt} = -\dfrac{e}{2m}[\vec{p}_m, \vec{B}] \end{cases}$$

Магнон – квазичастица спиновой волны:

$$\begin{bmatrix} W = \hbar\omega \\ p = \hbar k \\ \omega = \eta k^2 \end{bmatrix} \Rightarrow m_{mag} = \frac{\hbar}{2\eta}$$

Передача и хранение информации (~пс) в качестве альтернативы электронике (~нс)