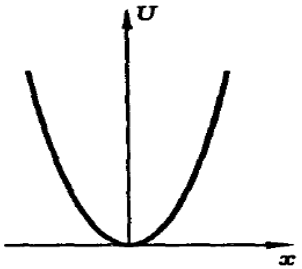
Нелинейный осциллятор

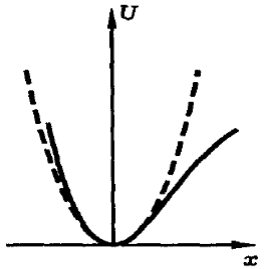
$$\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{e}{m}E$$

$$U(x) = \cancel{U(0)} + \cancel{x\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0}} + \frac{1}{2!}x^2\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=0} + \frac{1}{3!}x^3\left.\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\right|_{x=0} + \frac{1}{4!}x^4\left.\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}\right|_{x=0} + \cdots$$

$$U(x) = \frac{1}{2!}x^2\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=0}$$



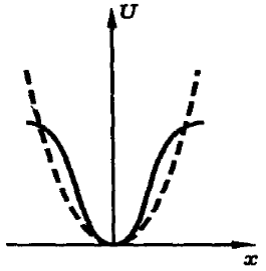
$$U(x) = \frac{1}{2!}x^2\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=0} + \frac{1}{3!}x^3\left.\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\right|_{x=0}$$



квадратичная нелинейность
в средах без центра симметрии

кубическая нелинейность
в средах с центром симметрии

$$U(x) = \frac{1}{2!}x^2\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=0} + \frac{1}{4!}x^4\left.\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}\right|_{x=0}$$



Нелинейная поляризация в средах

$$P_i = \underbrace{\varepsilon_0 \chi_{ij} E_j}_{P_л} + \underbrace{\varepsilon_0 \chi^{(2)}_{ijk} E_j E_k + \varepsilon_0 \chi^{(3)}_{ijkl} E_j E_k E_l + \cdots}_{P_{нл}}$$

для среды с квадратичной нелинейностью

$$E_1 = E_{10} \cos(\omega_1 t - k_1 z) \quad E_2 = E_{20} \cos(\omega_2 t - k_2 z)$$

$$P_{нл} = P_0 + P_{2\omega_1} + P_{2\omega_2} + P_{\omega_1+\omega_2} + P_{\omega_1-\omega_2}$$

$$P_0 = a(E_{01}^2 + E_{02}^2)$$
$$P_{2\omega_1} = aE_{01}^2 \cos(2\omega_1 t - 2k_1 z)$$
$$P_{2\omega_2} = aE_{02}^2 \cos(2\omega_2 t - 2k_2 z)$$
$$P_{\omega_1+\omega_2} = 2aE_{10}E_{20} \cos\big((\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)z\big)$$
$$P_{\omega_1-\omega_2} = 2aE_{10}E_{20} \cos\big((\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)z\big)$$

Фазовый синхронизм

для среды с квадратичной нелинейностью

$$E_1 = E_{10}\cos(\omega_1 t - k_1 z) \quad E_2 = E_{20}\cos(\omega_2 t - k_2 z)$$

$$P_{\text{нл}} = P_0 + P_{2\omega_1} + P_{2\omega_2} + P_{\omega_1+\omega_2} + P_{\omega_1-\omega_2}$$

$$P_0 = a(E_{01}^2 + E_{02}^2)$$

$$P_{2\omega_1} = aE_{01}^2\cos(2\omega_1 t - 2k_1 z)$$

$$P_{2\omega_2} = aE_{02}^2\cos(2\omega_2 t - 2k_2 z)$$

$$P_{\omega_1+\omega_2} = 2aE_{10}E_{20}\cos\big((\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)z\big)$$

$$P_{\omega_1-\omega_2} = 2aE_{10}E_{20}\cos\big((\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)z\big)$$

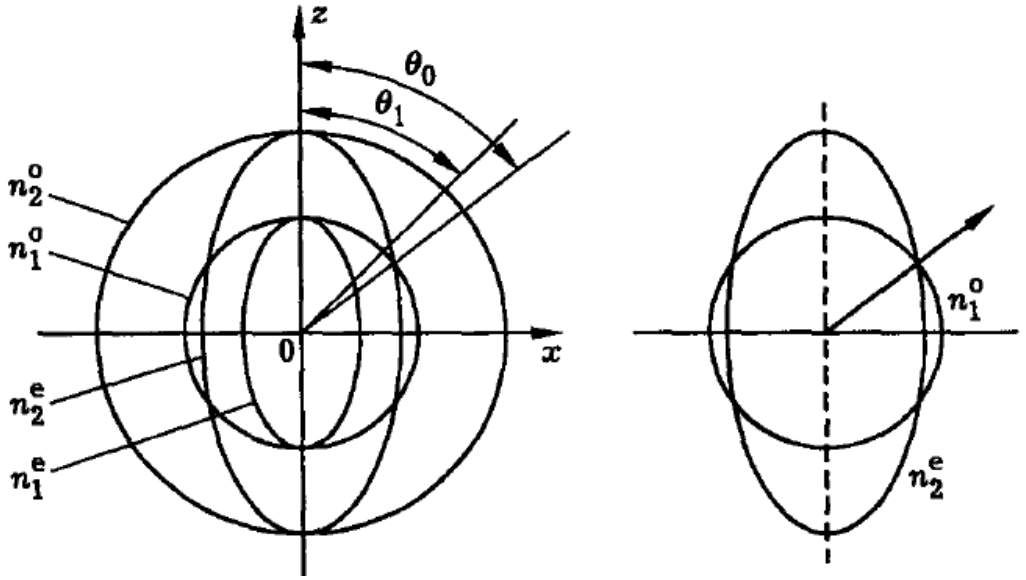
$$\omega = 2\omega_1$$

$$k = 2k_1(?) \qquad \frac{\omega n(\omega)}{c} \neq 2\frac{\omega_1 n(\omega_1)}{c}$$

Фазовый синхронизм

$$\omega = 2\omega_1$$

$$k = 2k_1(?) \qquad \frac{\omega n(\omega)}{c} \neq 2\frac{\omega_1 n(\omega_1)}{c}$$



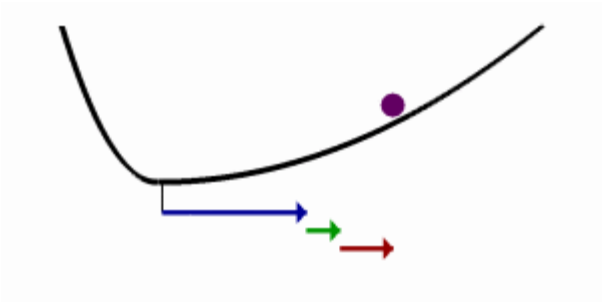
$$\frac{\omega n(\omega)}{c} = 2\frac{\omega_1 n(\omega_1)}{c} \quad \Rightarrow \quad V(\omega) = V(\omega_1)$$

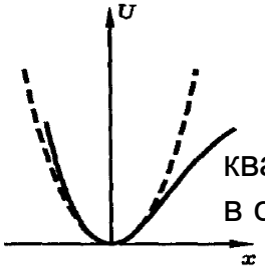
Процессы трёхволнового смешения

$$P_i = \varepsilon_0 \chi_{ij} E_j + \varepsilon_0 \chi^{(2)}_{ijk} E_j E_k + \varepsilon_0 \chi^{(3)}_{ijkl} E_j E_k E_l + \cdots$$

$$P_{\text{нл}} = P_0 + P_{2\omega_1} + P_{2\omega_2} + P_{\omega_1+\omega_2} + P_{\omega_1-\omega_2}$$

- Генерация второй гармоники (ГВГ)
- Оптическое выпрямление





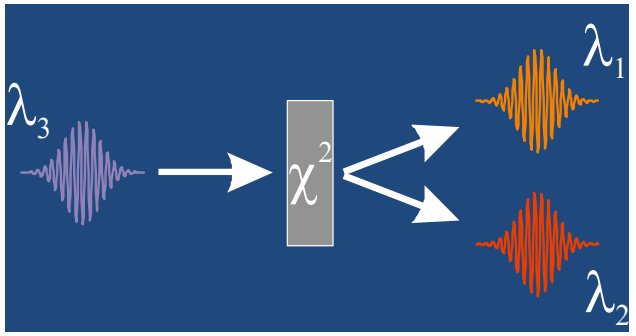
квадратичная нелинейность
в средах без центра симметрии

- Генерация суммарной частоты (ГСЧ)
- Генерация разностной частоты (ГРЧ)
- Параметрическая генерация и усиление (ПГ и ПУ)

Законы сохранения в ПГС и ПУ

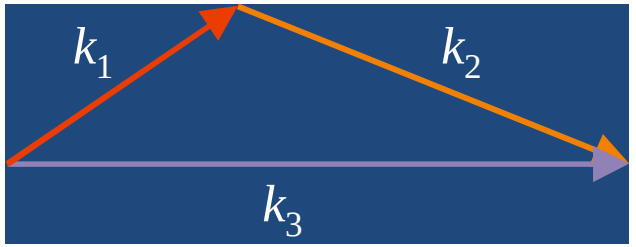
Сохранение энергии:

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$$



Сохранение импульса:

$$\Delta k = k_3 - k_2 - k_1 = 0$$

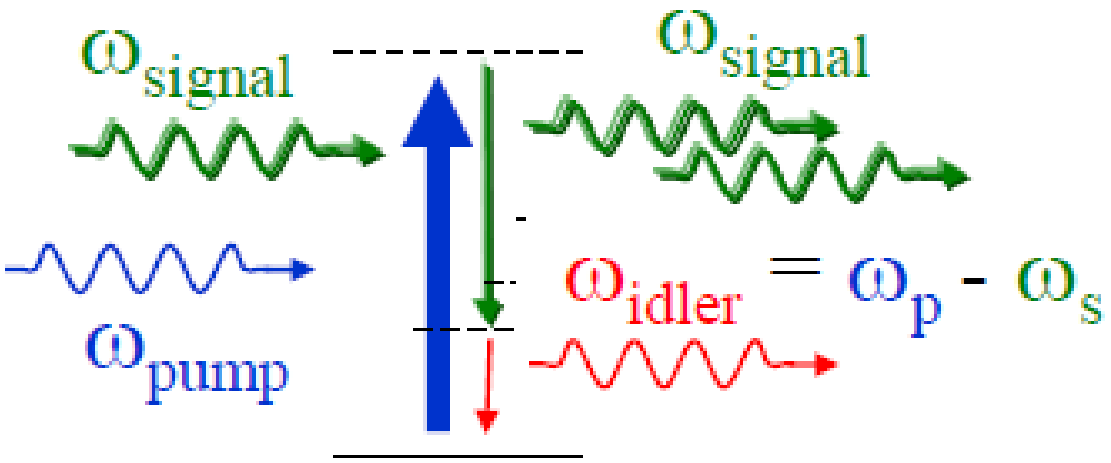


Параметрическая генерация и усиление

- Параметрические процессы происходят без возбуждения реальных уровней среды
- Процессы генерации разностной частоты и параметрического усиления отличаются начальными условиями
- Терминология: волна накачки "pump wave"

  сигнальная волна "signal wave"

  холостая волна "idler wave"



Усиление волн в ПГС

$$g = \sqrt{\Gamma^2 - \left(\frac{\Delta k}{2}\right)^2} \qquad \Gamma^2 = \frac{\omega_i \omega_s d_{eff}^2 |A_p|^2}{n_i n_s c^2} = \frac{8\pi^2 d_{eff}^2 I_p}{n_i n_s n_p \lambda_i \lambda_s \varepsilon_0 c}$$

в приближении высокого коэффициента усиления

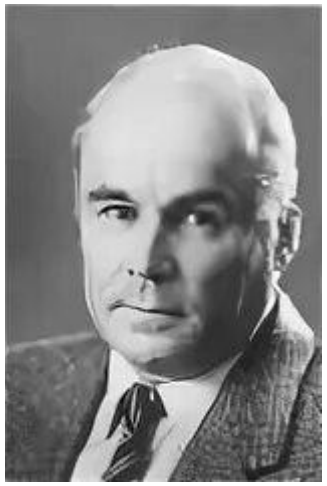
$$gL \gg 1$$

$$I_s(L) \cong \frac{1}{4} I_{s0} \exp(2gL) = \boldsymbol{G}_{усил} I_{s0}$$

$$I_i(L) \cong \frac{1}{4} \frac{\omega_i}{\omega_s} I_{s0} \exp(2gL) = \frac{\omega_i}{\omega_s} \boldsymbol{G}_{усил} I_{s0}$$

Коэффициент усиления $\boldsymbol{G}_{усил}$ зависит от

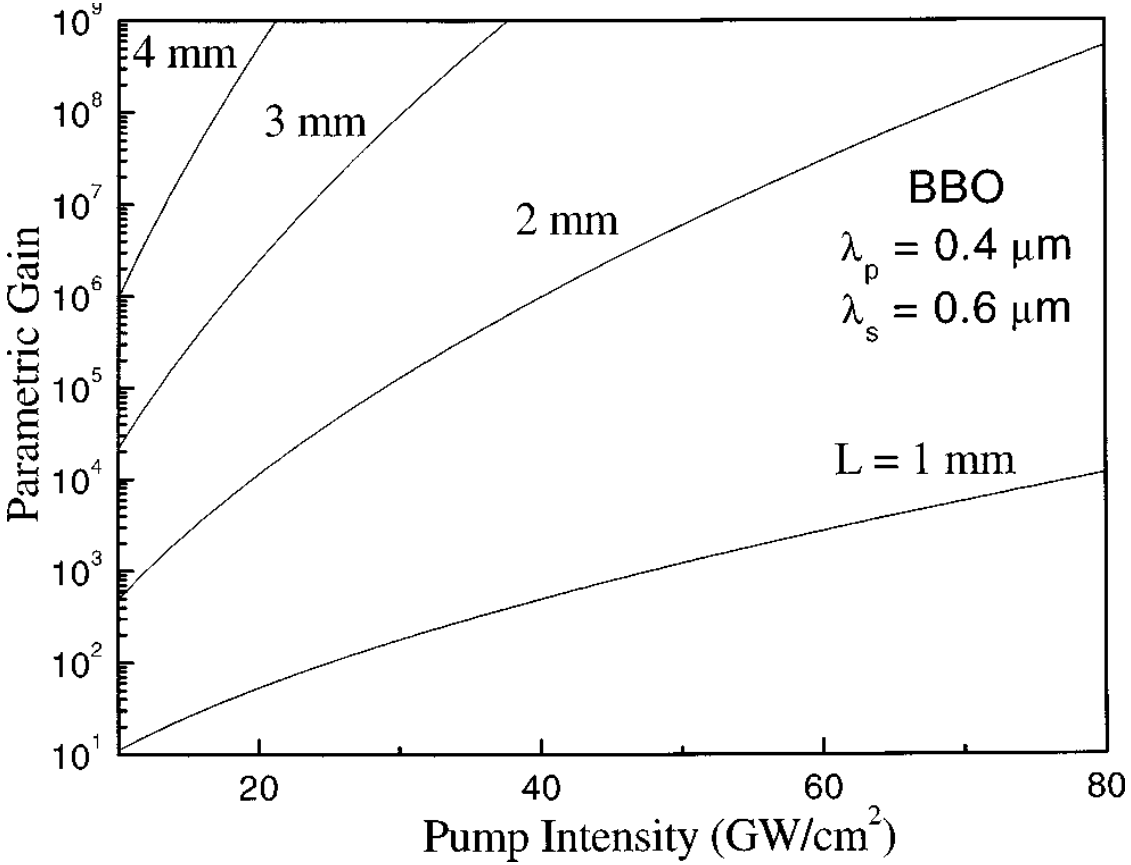
- длины кристалла
- дисперсионных свойств кристалла (d_{eff}, n)
- длины волны усиления/генерации
- интенсивности излучения накачки



С.А. Ахманов

Р.В. Хохлов

$G_{\text{усил}}(I_p)$

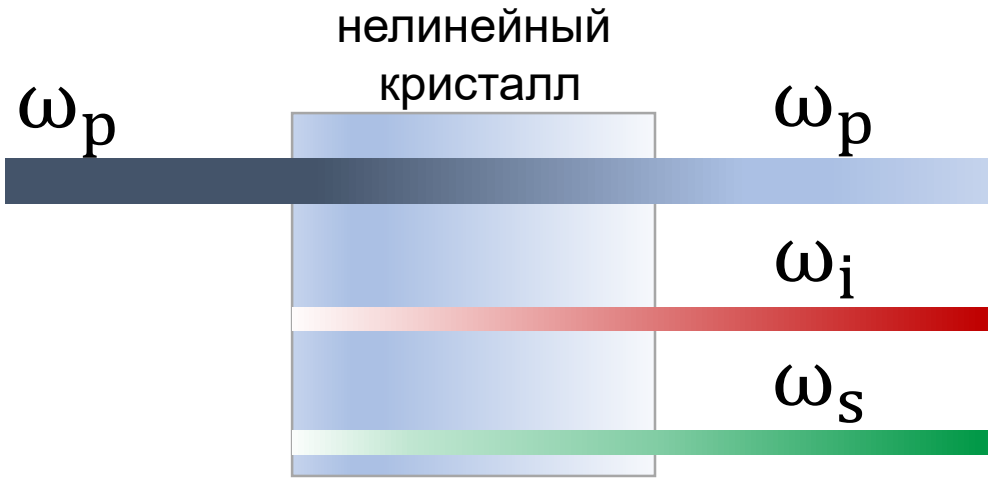


С.А. Ахманов, Р.В. Хохлов, Об одной возможности усиления световых волн, ЖЭТФ, 1962, 43 (7), 351.

С.А. Ахманов, А.И. Ковригин, А.С. Пискарскас, В.В. Фадеев, Р. В. Хохлов, Письма ЖЭТФ, 1965, 2, 300.

Параметрический генератор

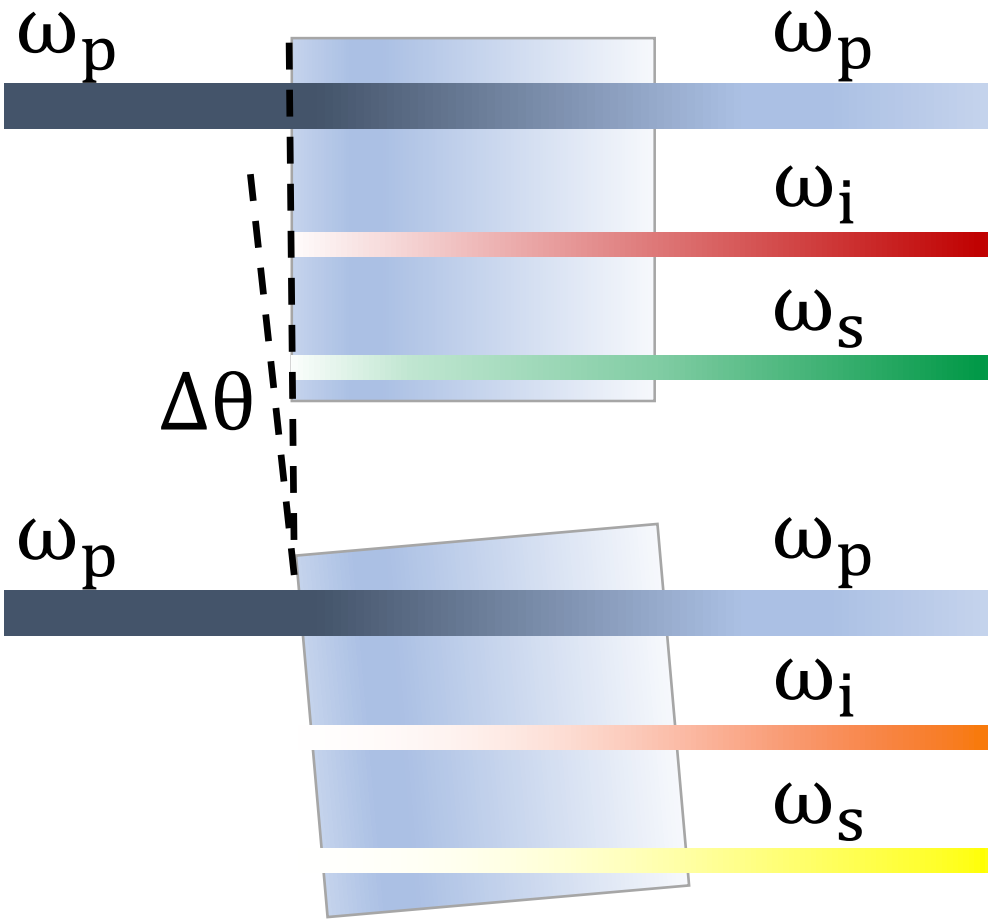
$$\Delta k(\omega, \theta, T) = \Delta k_0 + \frac{\partial \Delta k}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \Delta k}{\partial T} dT + \frac{\partial \Delta k}{\partial \omega} d\omega$$

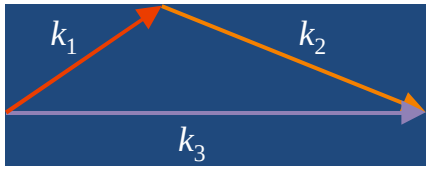


- необходима высокая интенсивность накачки (пс или фс импульсы)
- генерация возникает из "шума" (квантовый эффект)
- сигнальная и холостая волна генерируются "в конус"
- основное приложение – генерация перепутанных фотонов

Параметрический генератор: угловой синхронизм

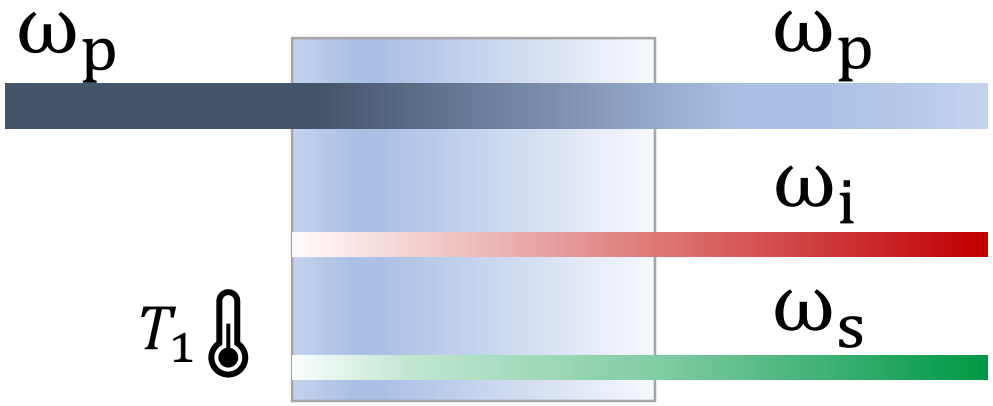
$$\Delta k(\omega, \theta, T) = \Delta k_0 + \frac{\partial \Delta k}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \Delta k}{\partial T} dT + \frac{\partial \Delta k}{\partial \omega} d\omega$$

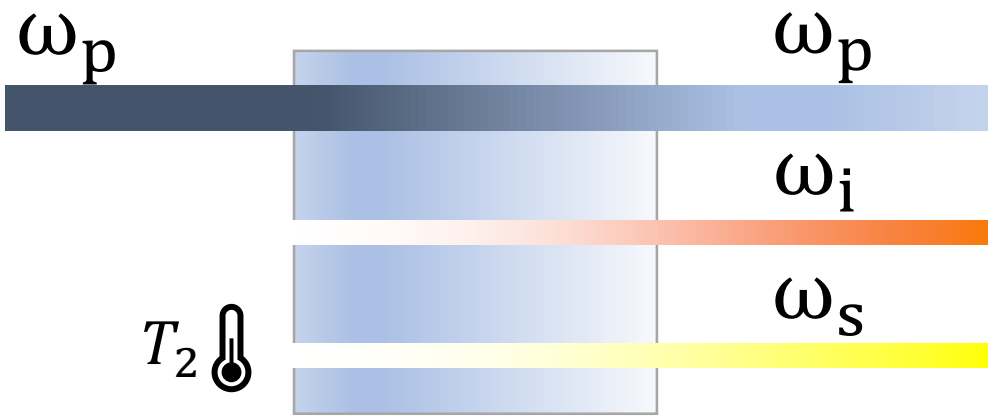




Параметрический генератор: температурный синхронизм

$$\Delta k(\omega, \theta, T) = \Delta k_0 + \frac{\partial \Delta k}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \Delta k}{\partial T} dT + \frac{\partial \Delta k}{\partial \omega} d\omega$$





ПГС и лазер: сравнение

- Частоты, генерируемых в ПГС волн, определяются из законов сохранения энергии и импульса, а не структурой уровней в лазерном материале.
- Перестройка сигнальной и холостой волны осуществляется в среднем и дальнем ИК диапазонах, недоступных для существующих лазерных источников; ширина полосы параметрического усиления определяется дисперсионными свойствами кристалла и его длиной.
- Параметрическая среда не нагревается, нет обмена энергией со средой, обмен энергией происходит только между волнами.
- Отсутствует запасенная энергия, уровни не возбуждаются, усиление существует только в течение длительности накачки, нужны короткие импульсы накачки.
- Усиление происходит на двух длинах волн (два выхода).
- Усиление определяется пиковой интенсивностью накачки; очень высокий коэффициент усиления возможен с ультракороткими импульсами накачки.
- Спектральные и временные характеристики генерируемых импульсов изначально определены и в большей степени зависят от накачки.

Нелинейная поправка к показателю преломления

$$P_i = \varepsilon_0 \chi_{ij} E_j + \varepsilon_0 \chi^{(2)}_{ijk} E_j E_k + \varepsilon_0 \chi^{(3)}_{ijkl} E_j E_k E_l + \cdots$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} + \varepsilon_0 \chi^{(3)} E^2 \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \left(\varepsilon^{л} + \chi^{(3)} E^2 \right) \vec{E}$$

$$n \approx \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon^{л}} \sqrt{1 + \frac{\chi^{(3)} E^2}{\varepsilon^{л}}} \approx \sqrt{\varepsilon^{л}} \left(1 + \frac{\chi^{(3)} E^2}{2\varepsilon^{л}} \right)$$

$$n \approx n_0 + n_2 E^2$$

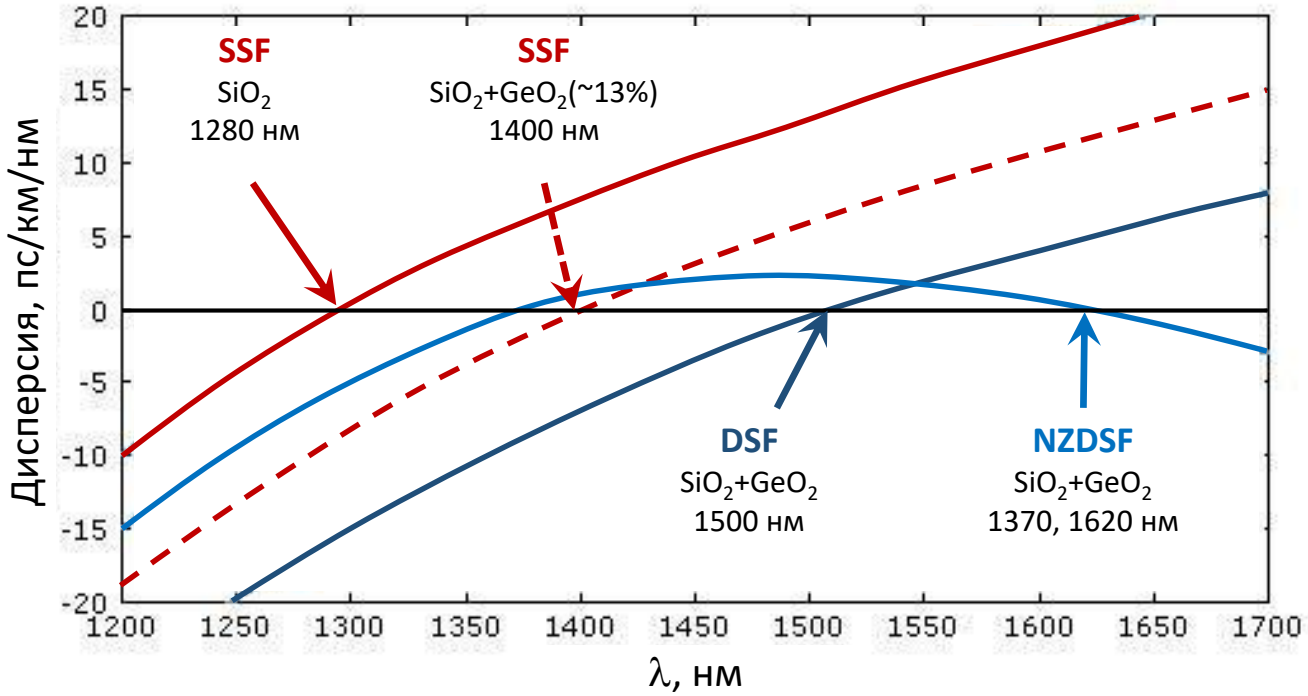
Дисперсионное увеличение длительности импульса

$$\begin{cases} \Delta\tau \approx L\Delta\left(\dfrac{1}{V_{гр}}\right) \\ \dfrac{1}{V_{гр}} = \dfrac{\partial k}{\partial\omega} = \left\| k = \dfrac{\omega n(\omega)}{c_0} \right\| = \dfrac{1}{c_0}\left(n + \omega\dfrac{\partial n}{\partial\omega}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial\omega} = \dfrac{\partial}{\partial\lambda}\dfrac{\partial\lambda}{\partial\omega} = \left\| \lambda = \dfrac{2\pi c_0}{\omega} \right\| = -\dfrac{2\pi c_0}{\omega^2}\dfrac{\partial}{\partial\lambda} \end{cases}$$

$$\Delta\tau \approx L\Delta\left[\frac{1}{c_0}\left(n - \lambda\frac{\partial n}{\partial\lambda}\right)\right] =$$

$$= \frac{L}{c_0}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(n - \lambda\frac{\partial n}{\partial\lambda}\right)\Delta\lambda = -\frac{L\lambda}{c_0}\frac{\partial^2 n}{\partial\lambda^2}\Delta\lambda$$

$$\Delta\tau \approx DL\Delta\lambda, \quad D = -\frac{\lambda}{c_0}\frac{\partial^2 n}{\partial\lambda^2}$$

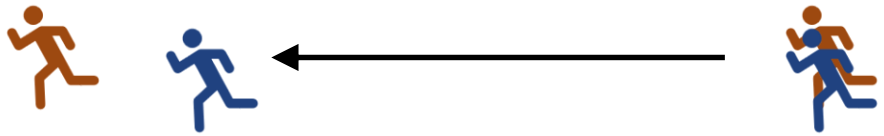


Чирпирование импульса

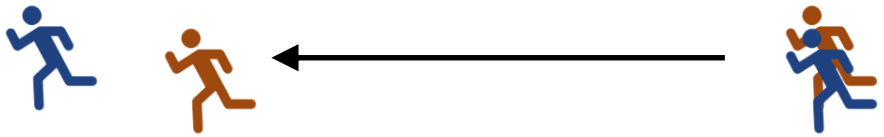
$$\Delta\tau \approx DL\Delta\lambda,\ \ D = -\frac{\lambda}{c_0}\frac{\partial^2 n}{\partial\lambda^2}$$

$$\Delta\tau = \tau\left(\lambda_{\text{красн}}\right) - \tau\left(\lambda_{\text{син}}\right) = DL\left(\lambda_{\text{красн}} - \lambda_{\text{син}}\right)$$

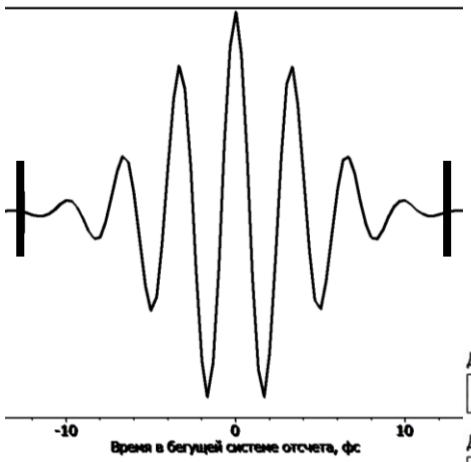
если $D < 0$, то $\tau\left(\lambda_{\text{красн}}\right) < \tau\left(\lambda_{\text{син}}\right)$ ("красный" быстрее)

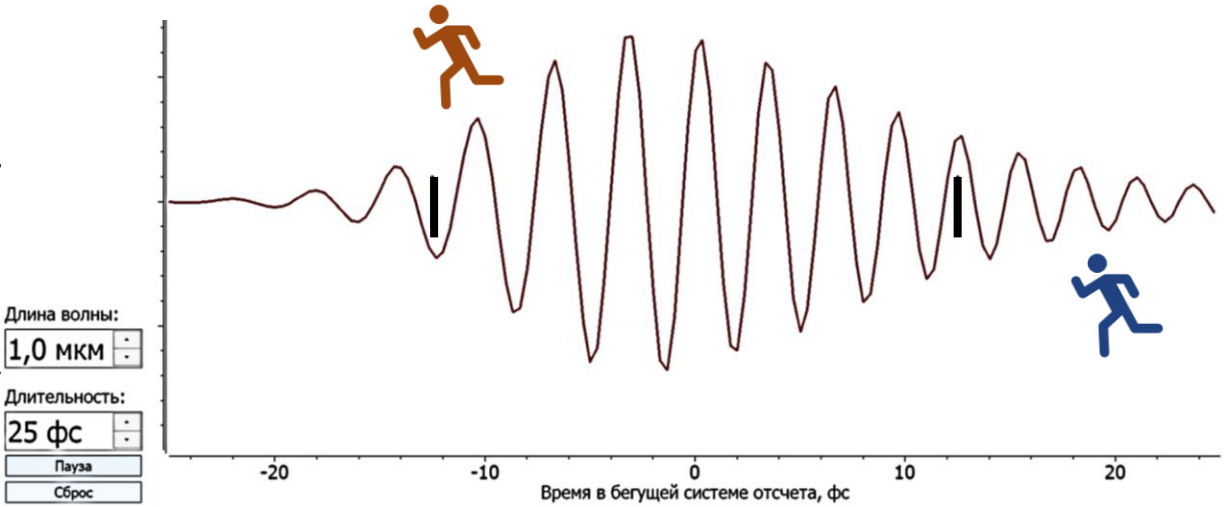


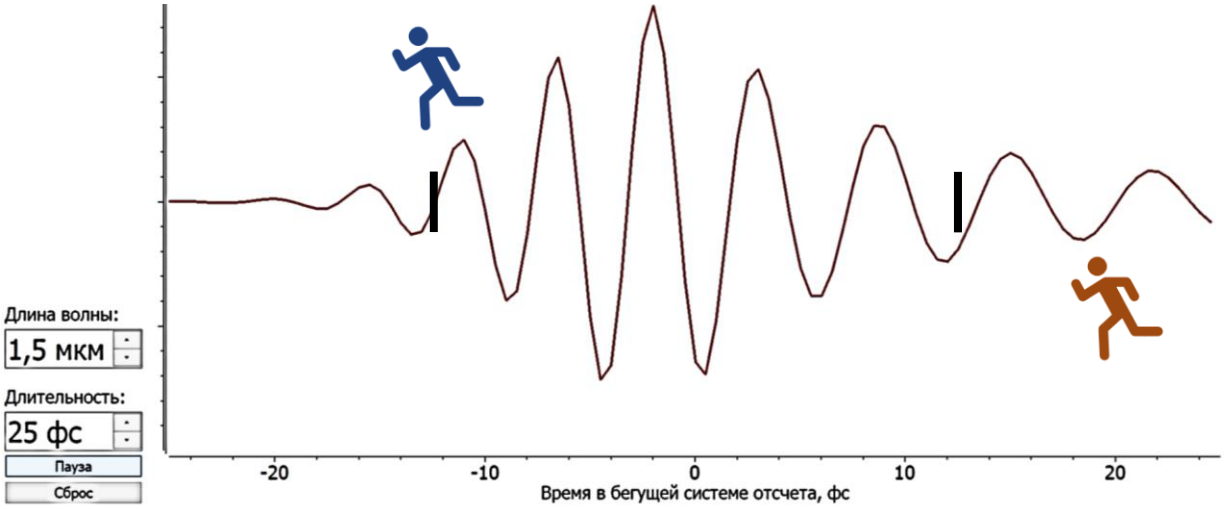
если $D > 0$, то $\tau\left(\lambda_{\text{красн}}\right) > \tau\left(\lambda_{\text{син}}\right)$ ("синий" быстрее)



Чирпирование импульса



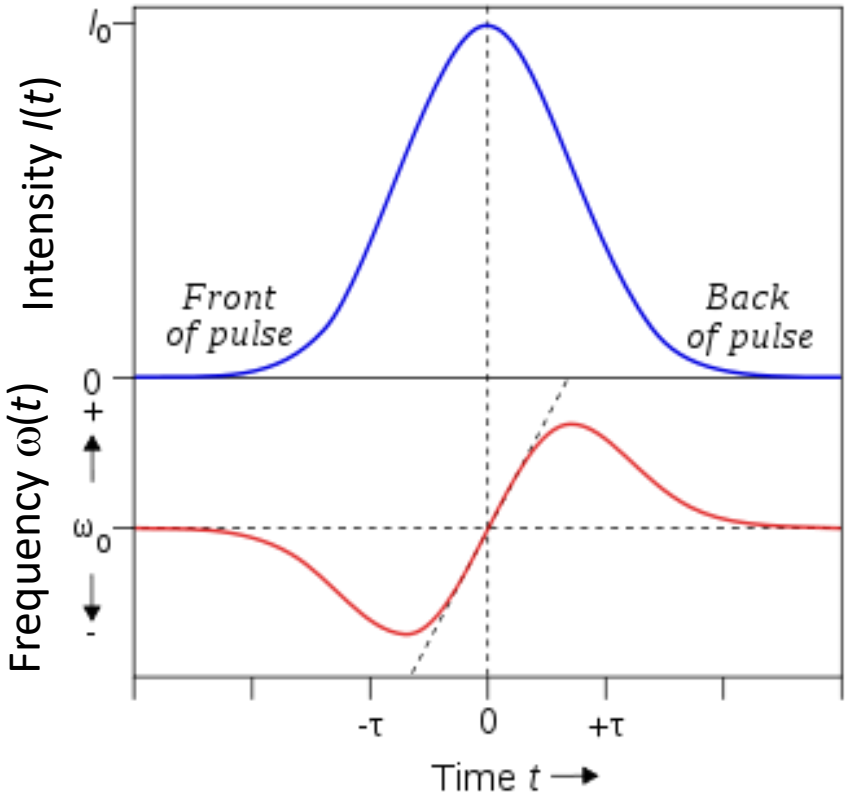




Фазовая самомодуляция

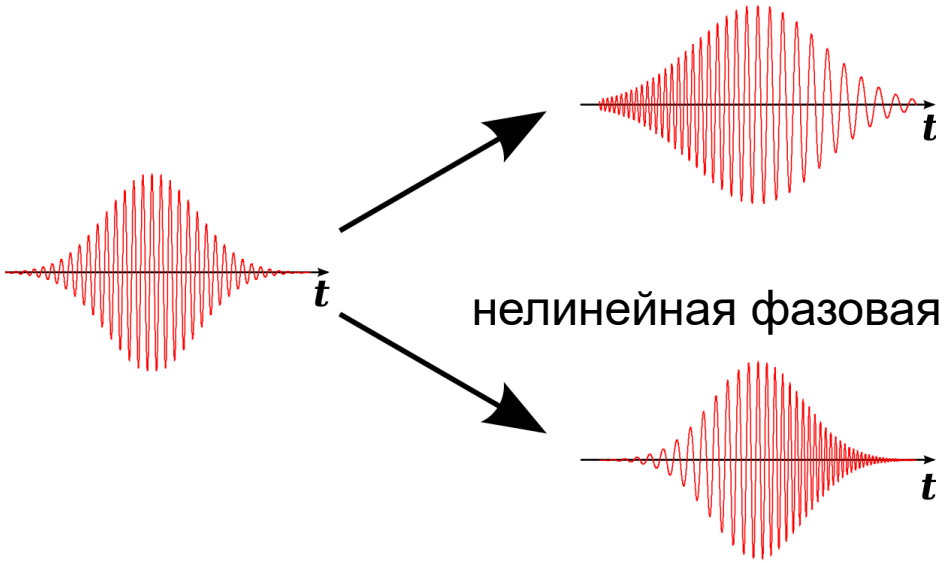
$$\varphi(t) = \omega_0 t - kz = \omega_0 t - k_0 z\left(n_0 + n_2 E^2(t)\right)$$

$$\omega(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \omega_0 - k_0 z n_2 \frac{\partial E^2(t)}{\partial t}$$



Компенсация фазовой самомодуляции и дисперсии

дисперсия групповых скоростей



$$\Delta\tau = DL\Delta\lambda$$

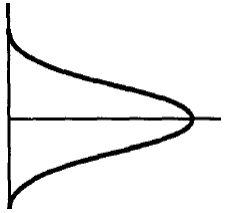
нелинейная фазовая самомодуляция

$$\omega(t) = \omega_0 - k_0 z n_2 \frac{\partial E^2(t)}{\partial t}$$

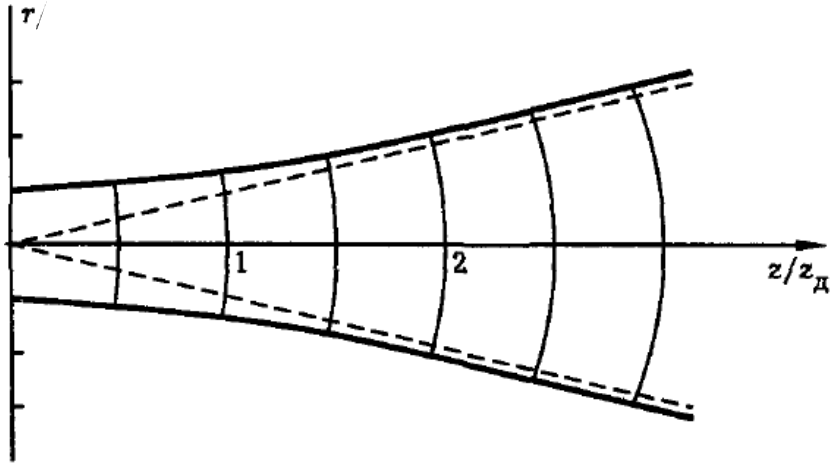
Солитон – структурно устойчивая уединённая волна, распространяющаяся в нелинейной среде.

Оптические солитоны могут использоваться для передачи информации по оптоволокну.

Самофокусировка

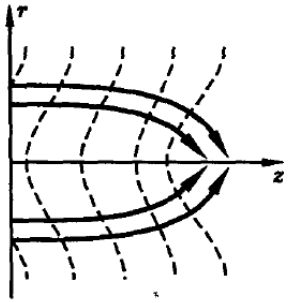


$$I(r) = I_0 \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right) \qquad I \sim E^2$$



$$z_д = k r_0^2$$

$$R(z) = z\left(1 + \frac{z_д^2}{z^2}\right)$$



$$n = n_0 + n_2 E^2(r) \qquad R_{нл}(z) = \frac{n_0}{n_2 E^2}\frac{r_0^2}{z}$$

$$P_{кр} \sim \frac{\lambda^2}{n_2}$$

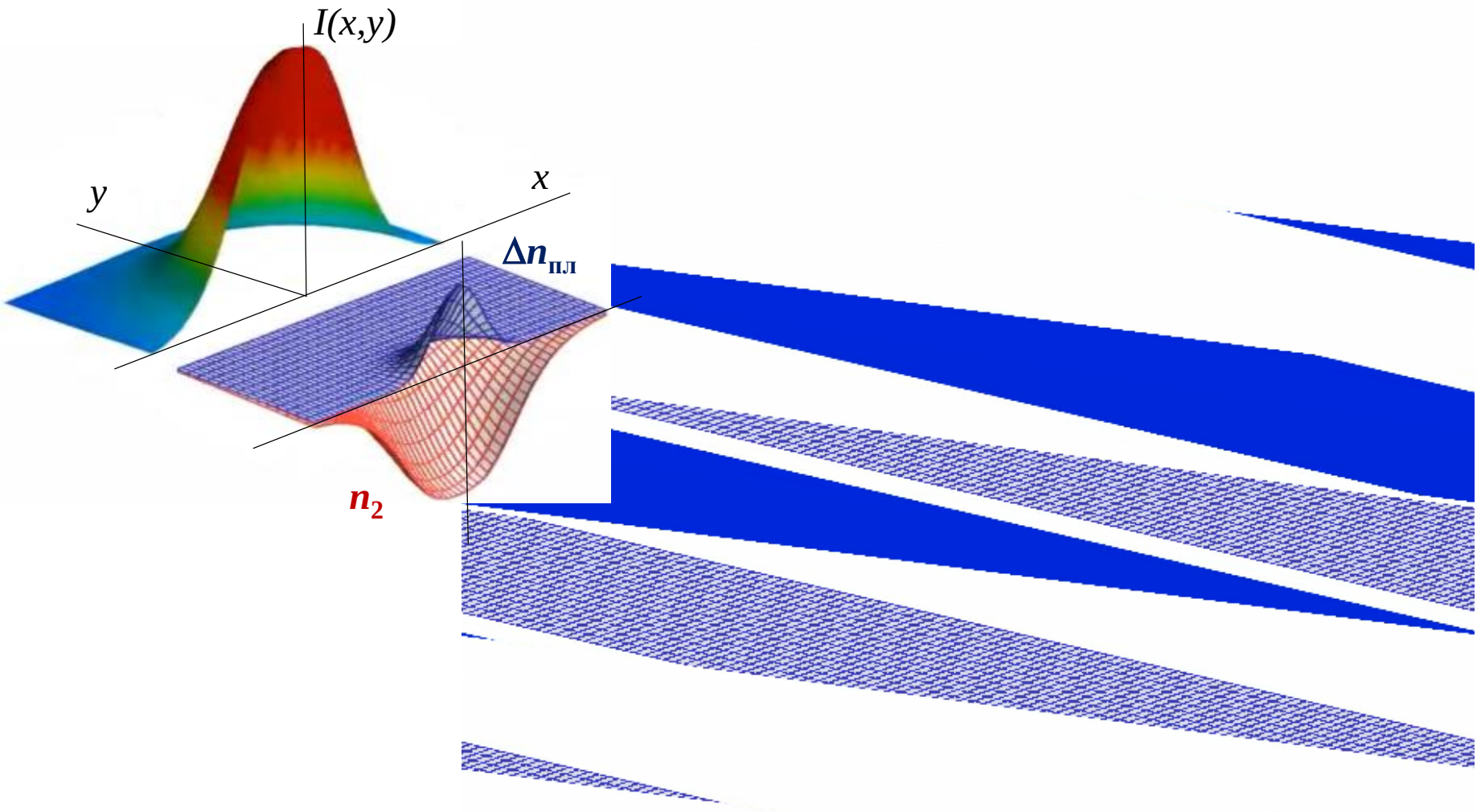
(1 – 10 кВт для видимого диапазона)

Филаментация

Филаментация – явление пространственно-временной локализации светового поля, поддерживающейся на значительном расстоянии.

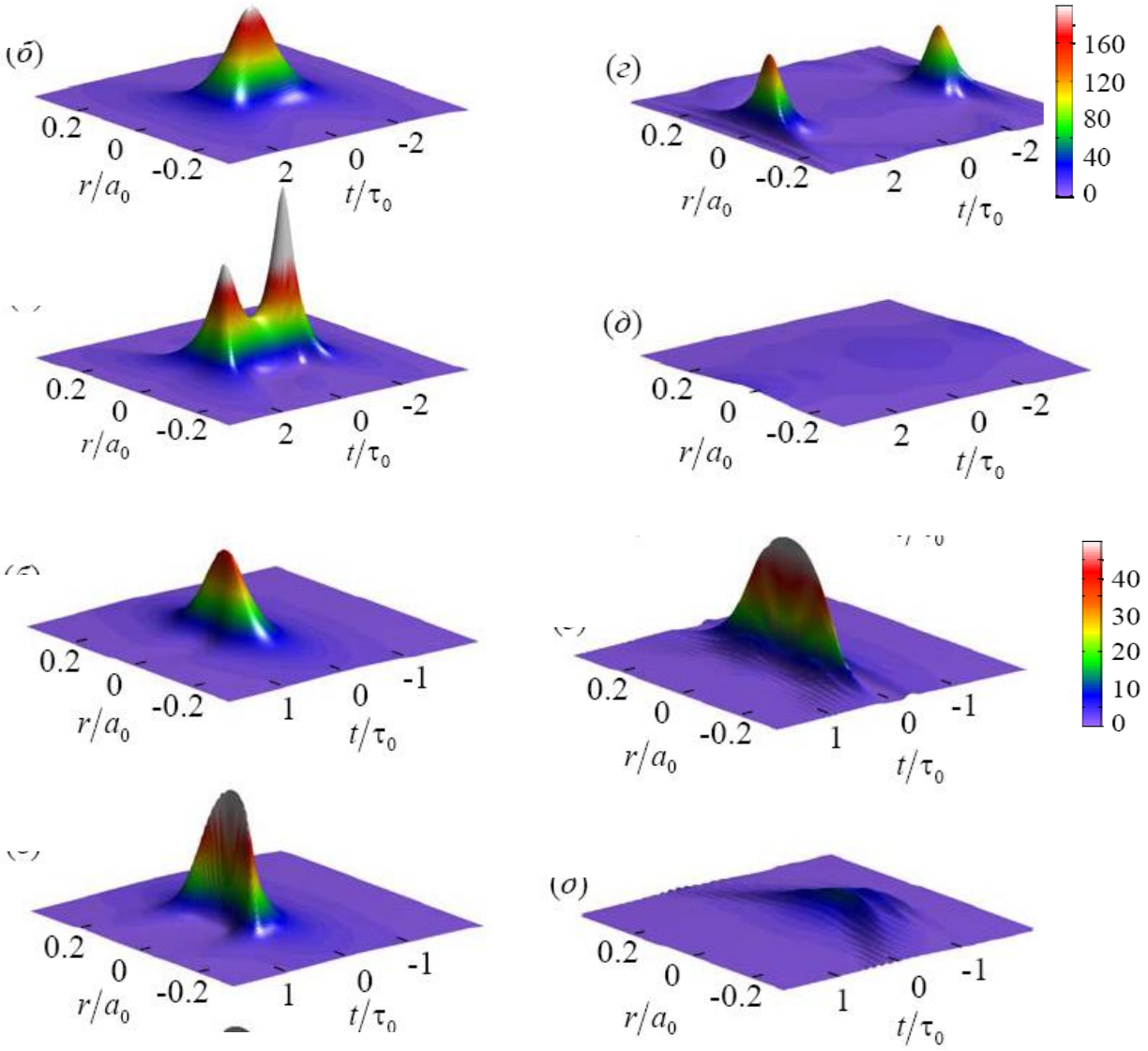
Филаментация сопровождается образованием плазменных каналов, сверхуширением спектра импульса, генерацией высших гармоник.

Филаментация



Трансформация импульса в филаменте

Материал: плавленый кварц

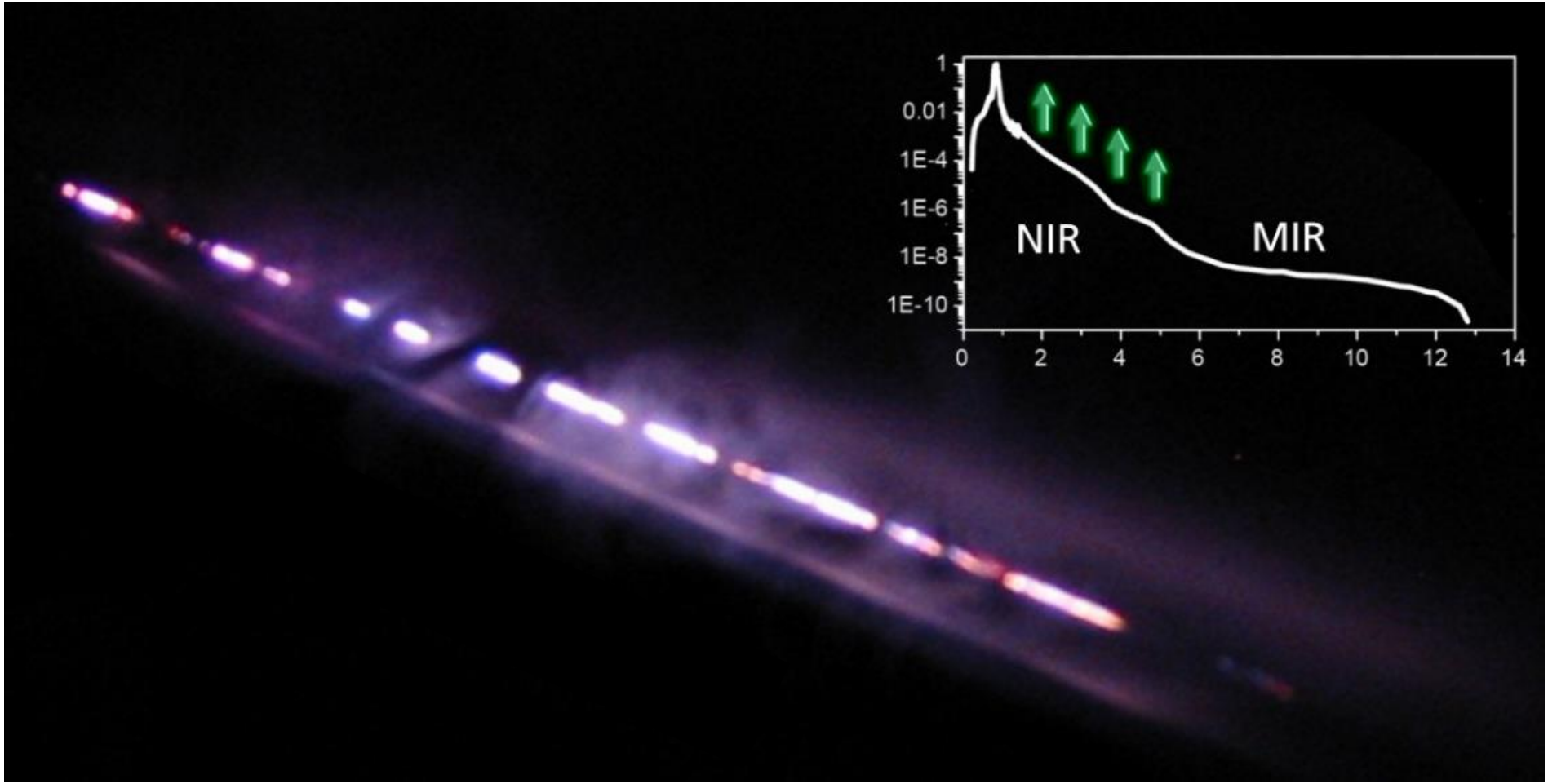


Импульс:
400 нм, 140 фс,
$2.5*10^{10}$ Вт/см^2, 70 мкм
нормальная ДГС

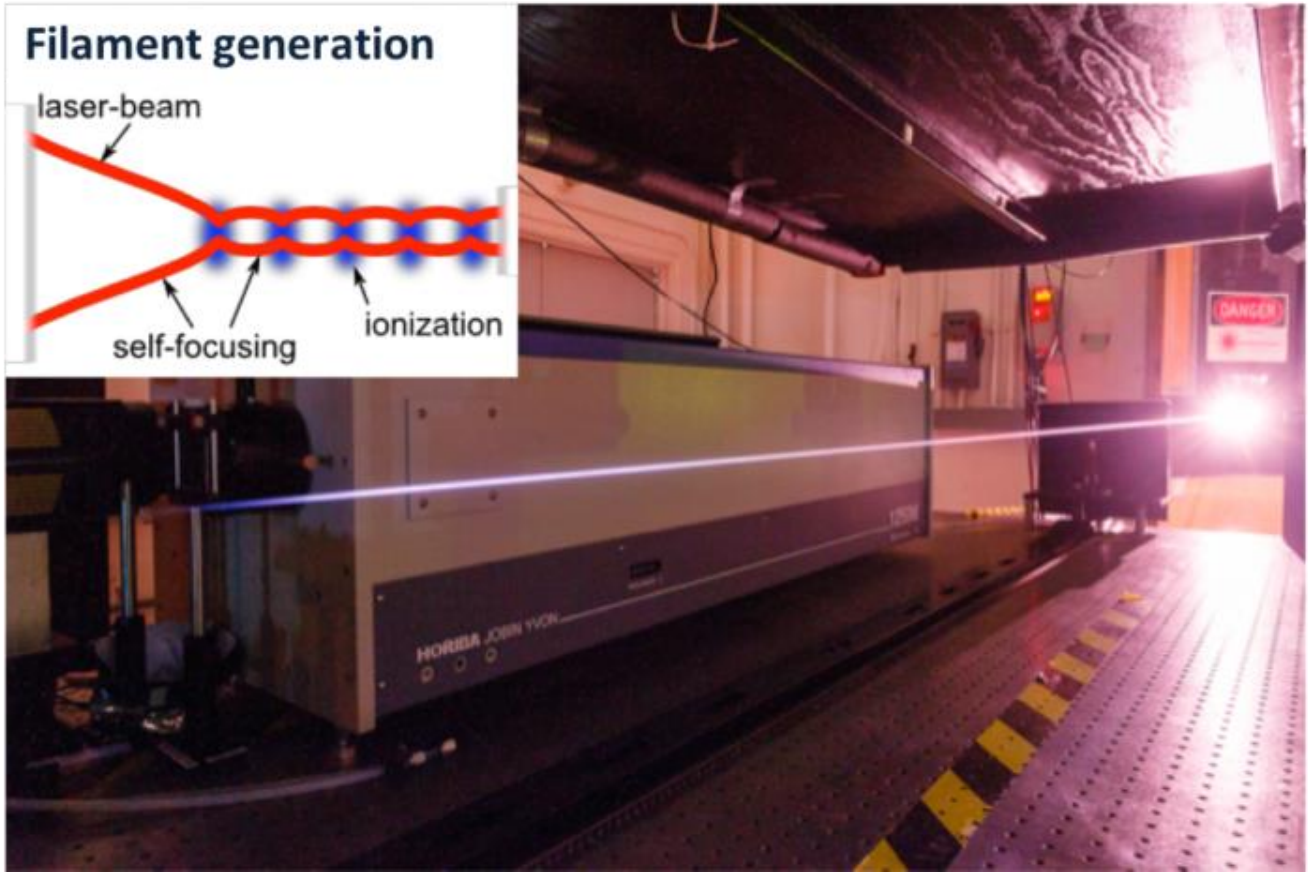
Импульс:
2500 нм, 40 фс,
$9.5*10^{11}$ Вт/см^2, 70 мкм
аномальная ДГС

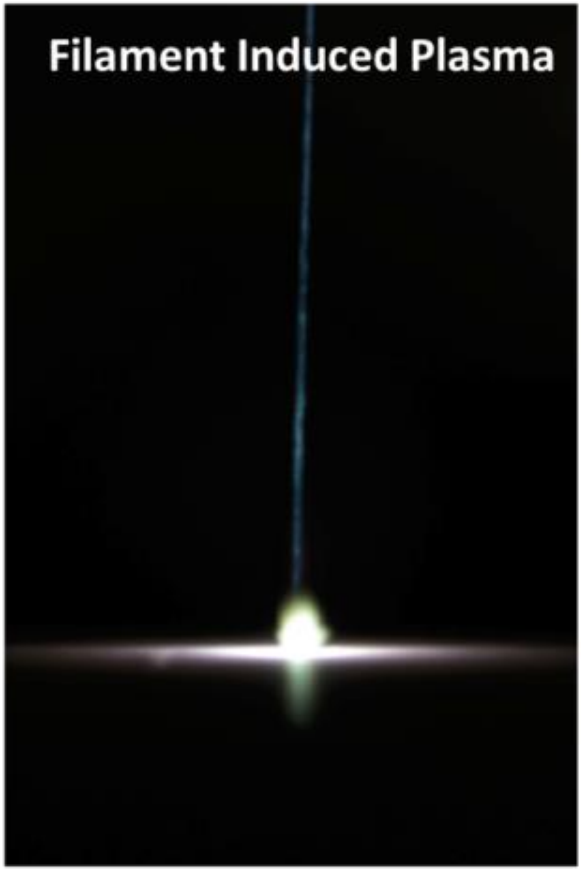
Примеры филаментов

λ = 800 нм, f = 10 Гц, W = 2–20 мДж, L ~ 1 м



Примеры филаментов

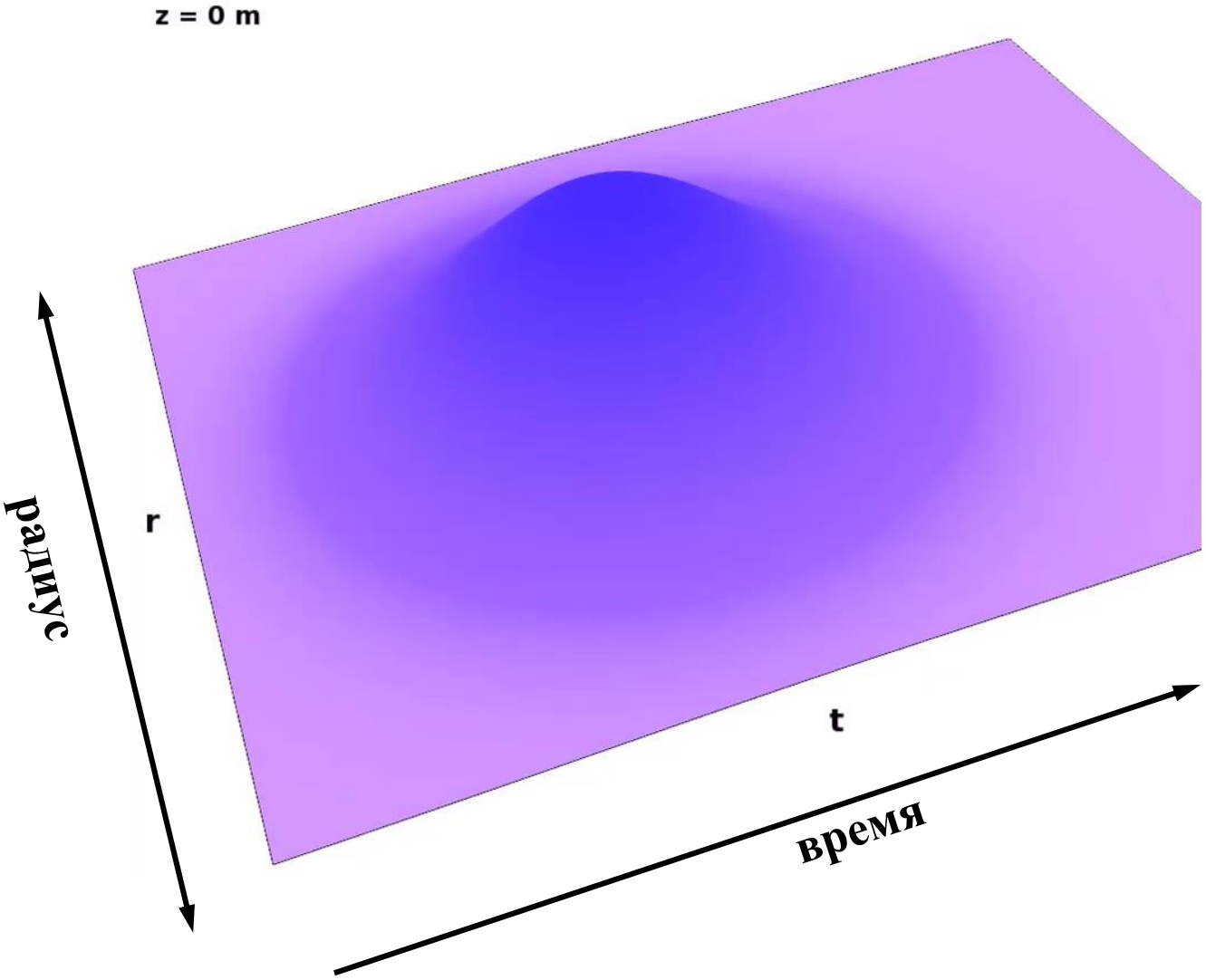




Филаментация интенсивного ультракороткого лазерного импульса, распространяющегося в воздухе на расстояния в десятки километров, реализуется при динамическом балансе между самофокусировкой пучка и дефокусирующим действием плазмы, возникающей при многофотонной ионизации молекул воздуха. Филаменты имеют центральное ядро с диаметром ~ 100 мкм и высокой интенсивностью ~ 10^{13} Вт/см^2.

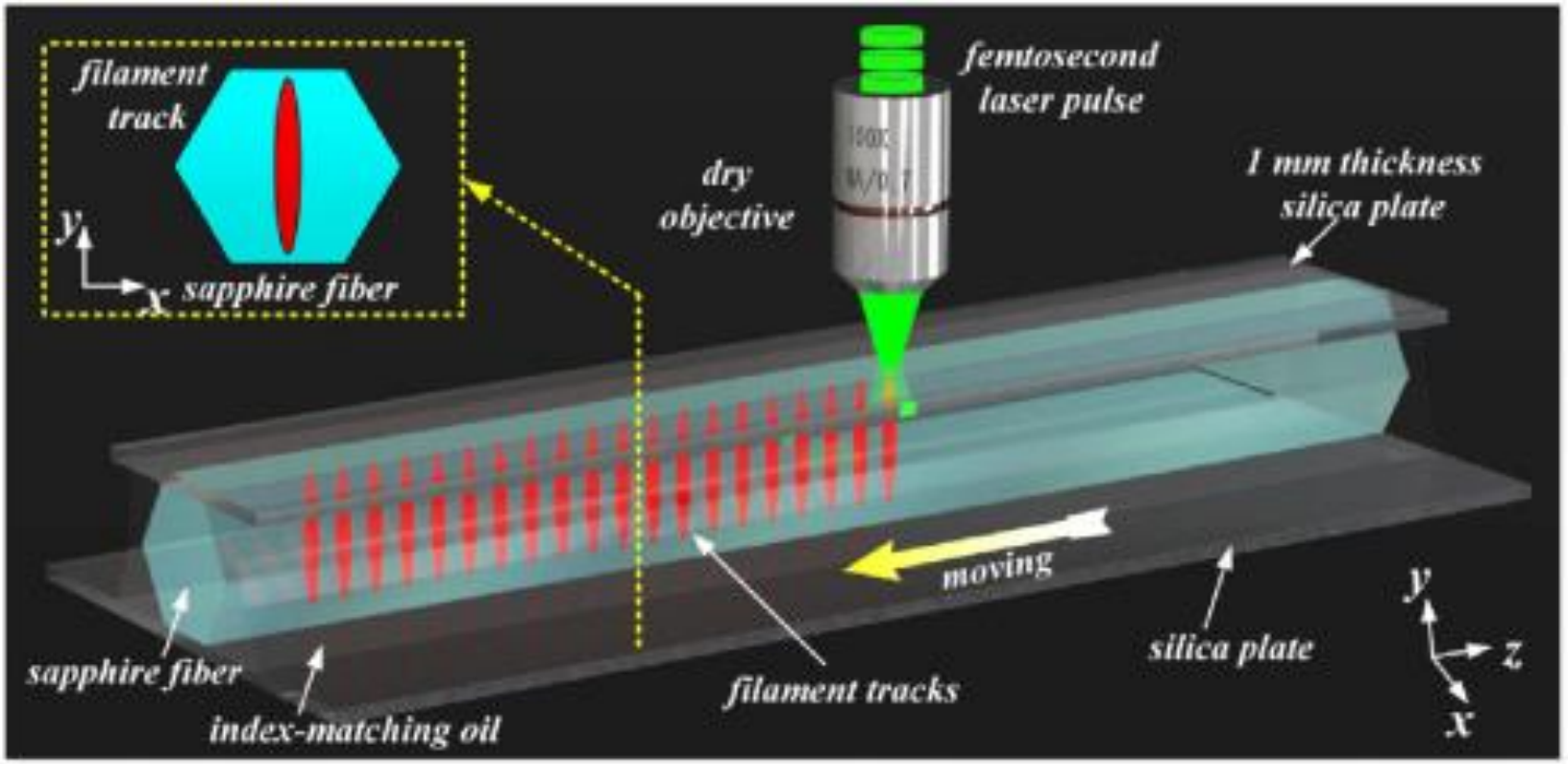
Световые пули

энергия – 8 мДж, интенсивность – 10^{12} Вт/см^2, длительность – 200 фс,
пиковая мощность – $P/P_{кр}=20$

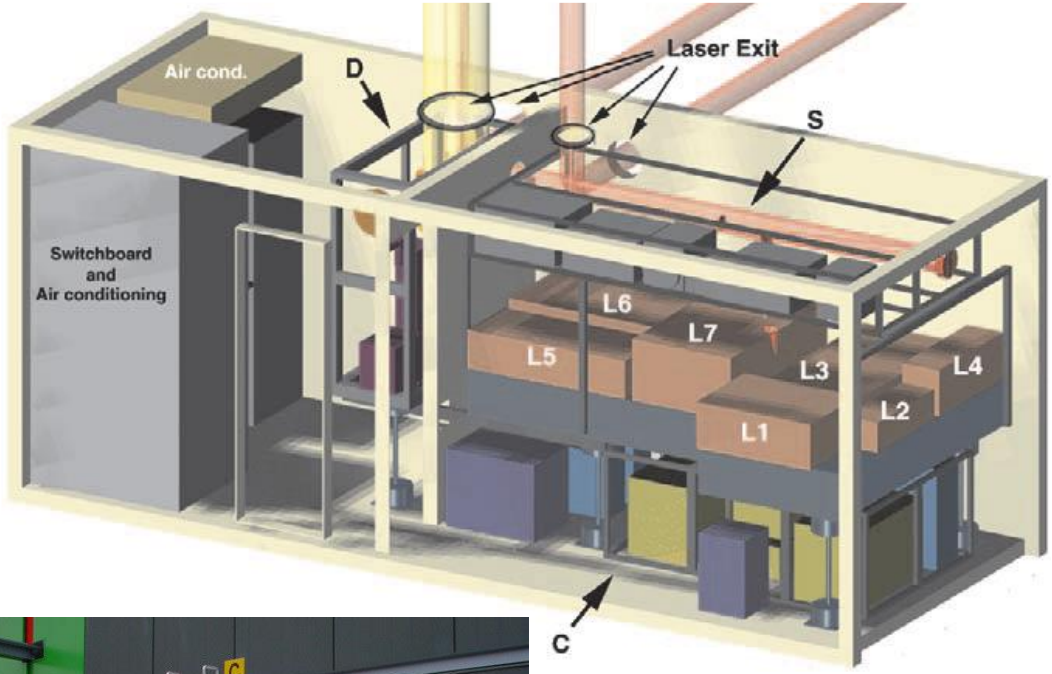


Изменение
с расстоянием
пространственно-
временного
распределения
интенсивности

Использование филаментов для нанесения решётки Брэгга в волокнах



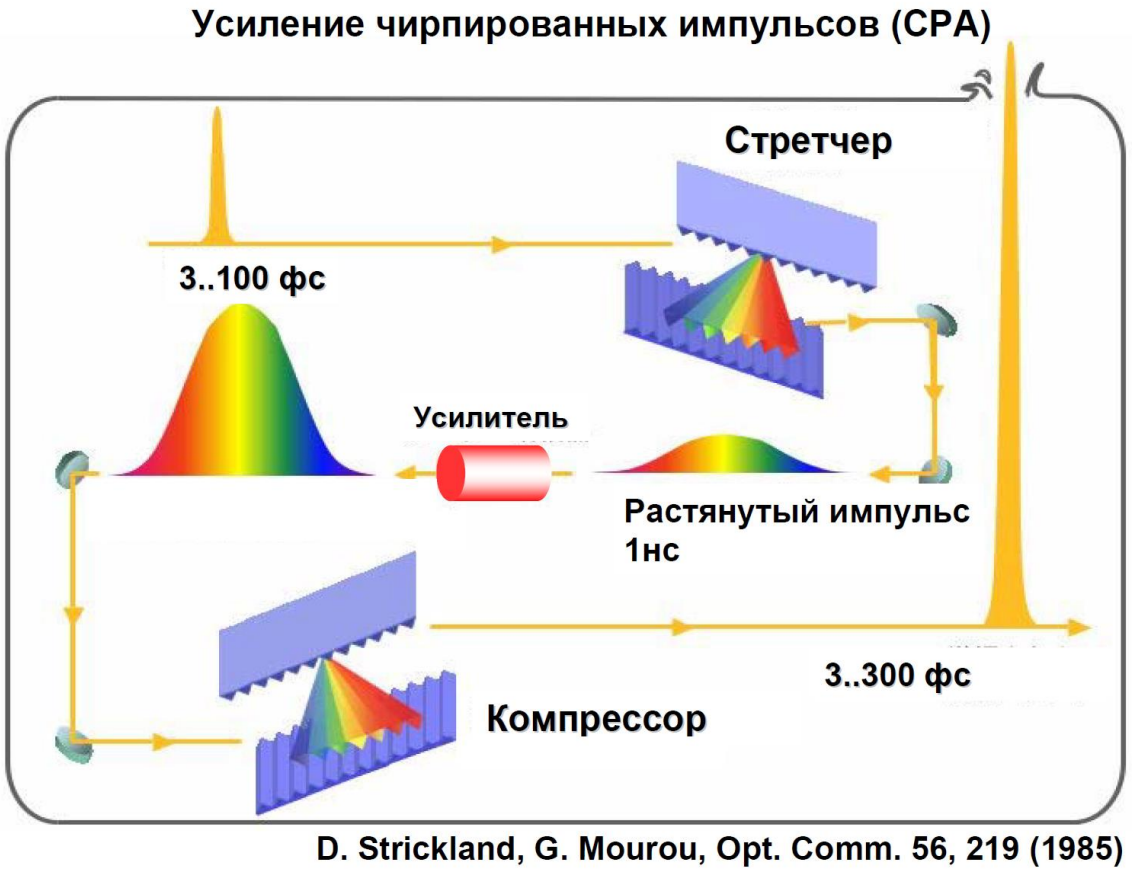
Проект Teramobile



Центральная длина волны $\lambda = 793$ нм
Ширина спектра $\Delta\lambda = 16$ нм
Энергия в импульсе $E = 350$ мДж
Длительность импульса $\tau = 70$ фс
Пиковая мощность $P = 5$ ТВт
Частота повторения $f = 10$ Гц
Диаметр выходного пучка $d = 50$ мм
Изменение длительности от 70 фс до 2 пс за счёт чирпирования
Стабильность по энергии: 2.5% стандартное отклонение по 400 лазерным импульсам
Размеры 3.5 *x* 2.2 м

Teramobile: A mobile femtosecond-terawatt laser and detection system
H. Wille, M. Rodriguez, J. Kasparian, D. Mondelain, J. Yu, A. Mysyrowicz, R. Sauerbrey, J. P. Wolf, L. Wöste
Eur. Phys. J. AP 20 (3) 183-190 (2002)

Современные технологии получения мощных лазерных импульсов



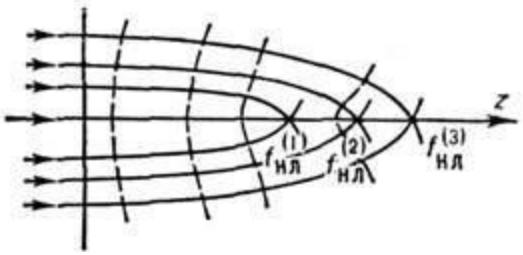
D. Strickland, G. Mourou, Opt. Comm. 56, 219 (1985)

$$P = \frac{W}{\tau}$$

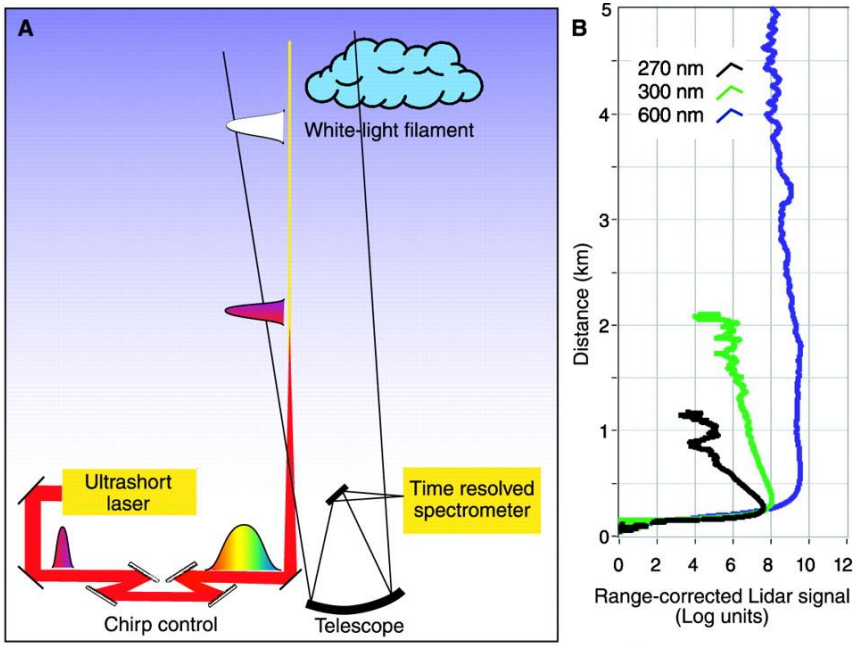
Нобелевская премия по физике , 2018 г.

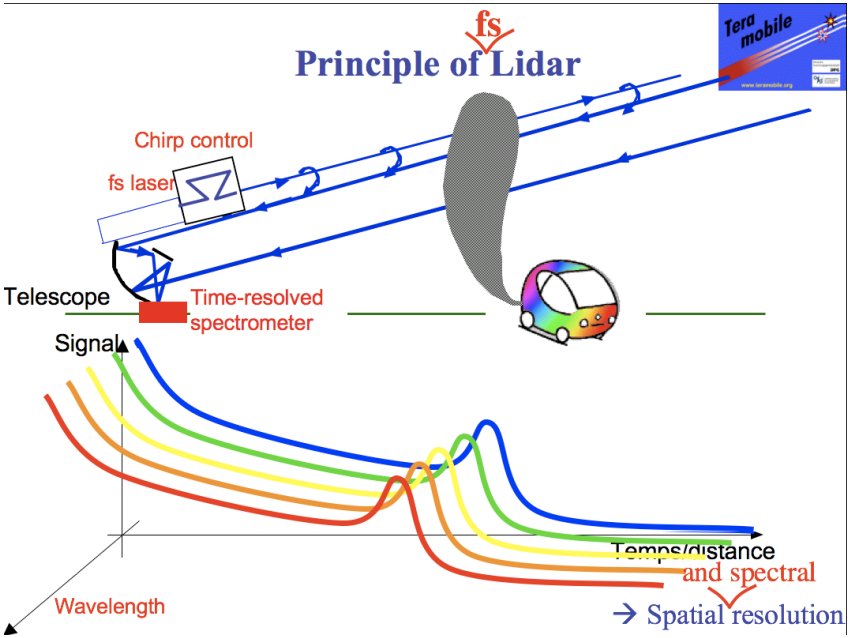
Самофокусировка лазерного пучка при $P > P_{cr} \sim \frac{\lambda^2}{n_2}$

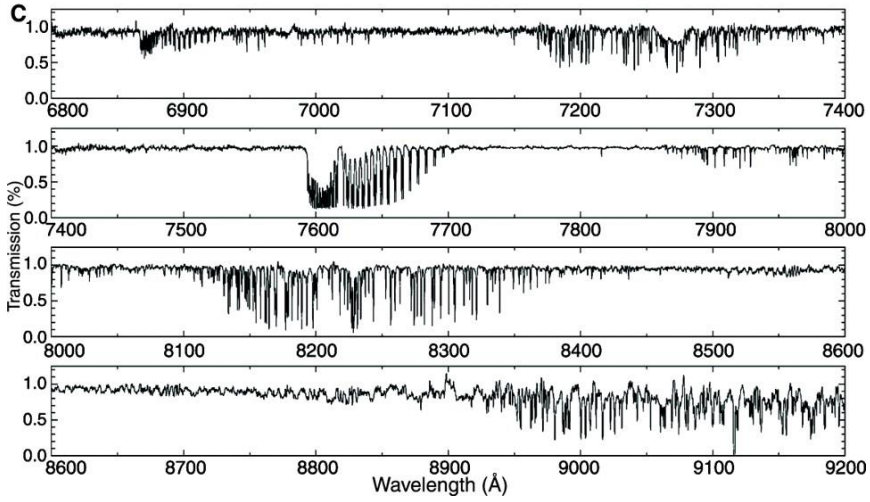
$$n(r) = n_0 + n_2 I(r)$$



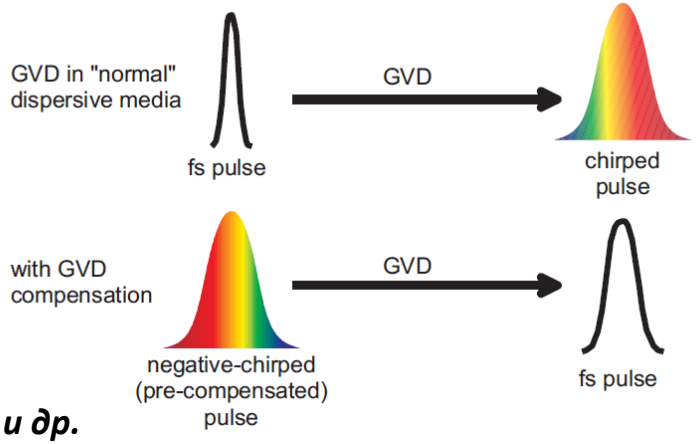
Дистанционное зондирование атмосферы с помощью лазерных филаментов





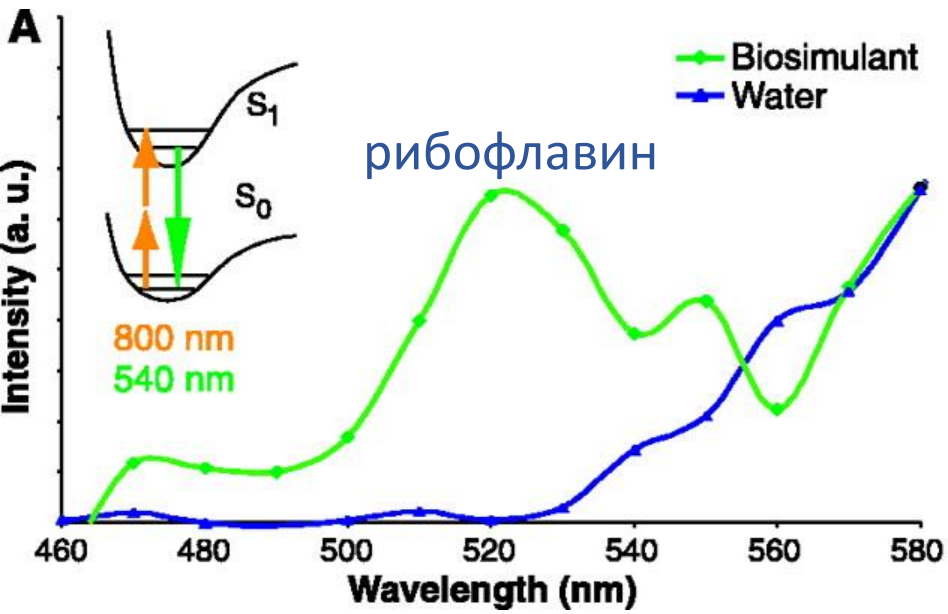


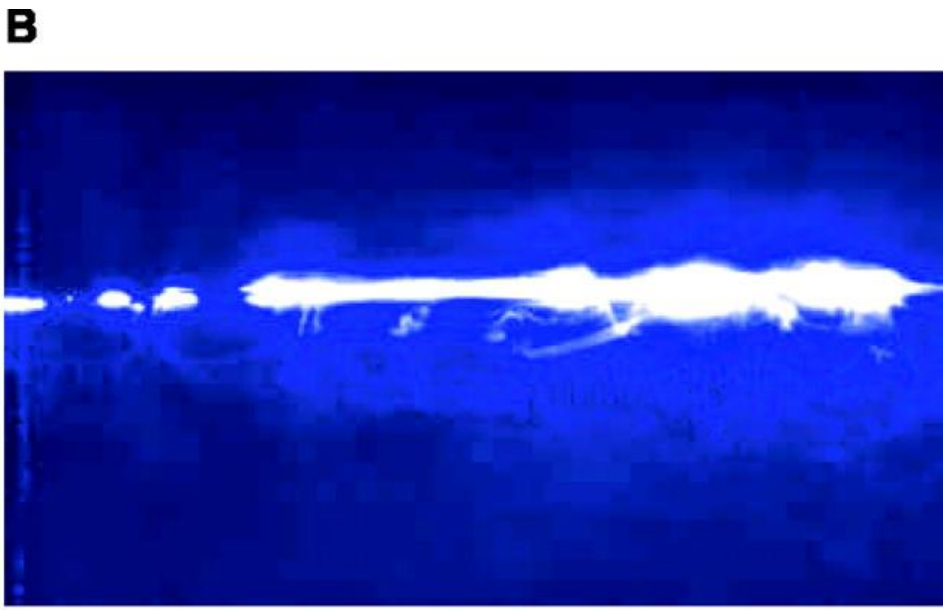
Управление длиной лазерного филамента за счёт предварительного чирпирования

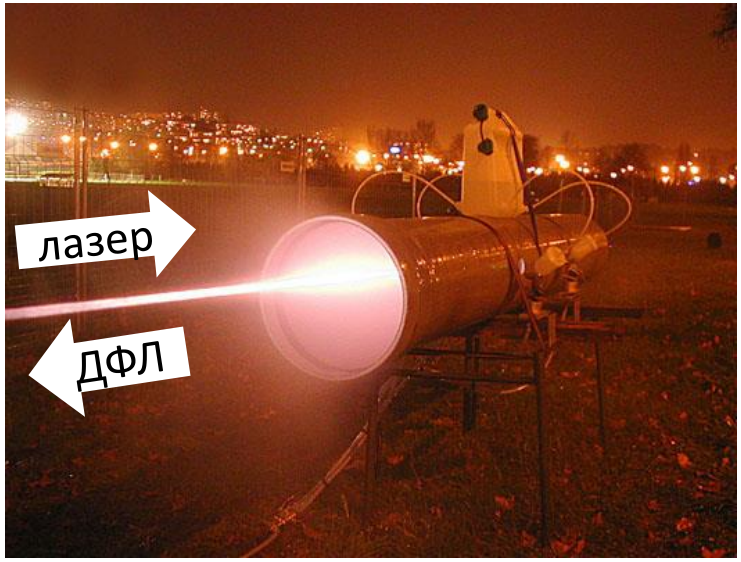


Спектральные «отпечатки пальцев» кислорода, водяного пара и др.

Лазерные филаменты и биобезопасность

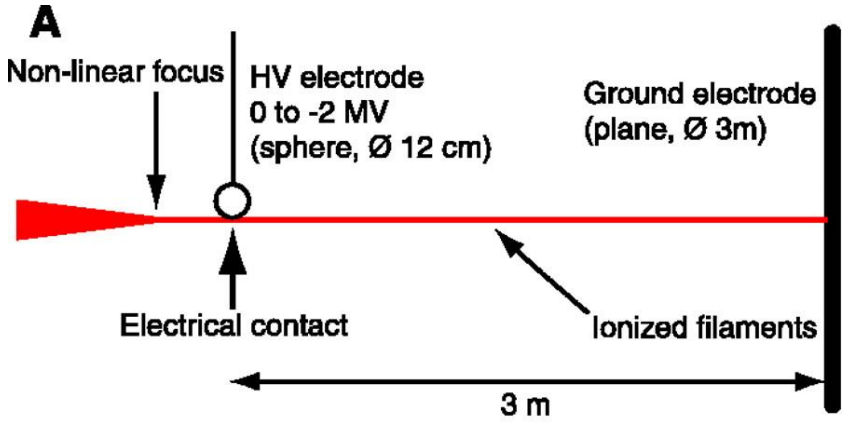




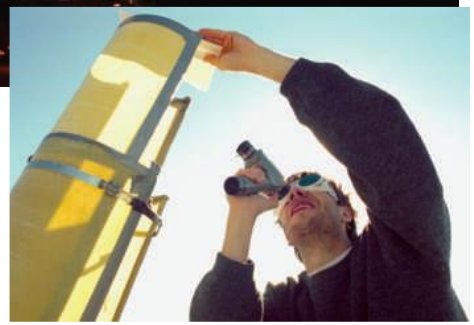


https://www.teramobile.org/teramobile.html

Управляемая лазером «молния»



https://www.teramobile.org/teramobile.html



J.Kasparian настраивает размер лазерного пучка

При «правильном формировании» лазерного филамента по пространству и времени относительно формирования высоковольтного разряда между двумя электродами удаётся сделать его управляемым!