

Лекция 6
Введение в статфизику

Статистическая физика

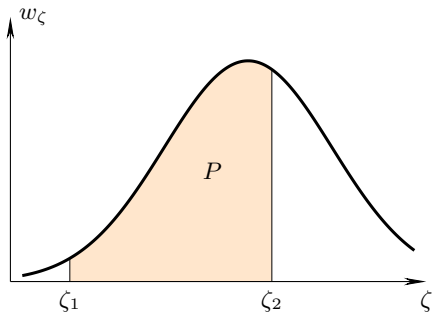
раздел физики, посвященный описанию и предсказанию свойств макроскопических систем с **большим числом частиц**

рассматривает микроскопические параметры частиц системы, полагая их **случайными величинами**

является наукой **теоретической**
восходит от абстрактного к конкретному

Случайные величины для физиков

«случайность» величины ζ мы будем понимать интуитивно



$$P(\zeta \in [\zeta_1; \zeta_2]) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} w(\zeta) d\zeta$$

- Случайная величина принимает разные значения от измерения к измерению
- $w(\zeta)$ или w_ζ — ф-ция плотности вероятности (PDF). Помимо нахождения вероятностей, ее еще используют для определения средних значений (матожиданий):

$$E[f(\zeta)] \equiv \langle f(\zeta) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) w_\zeta d\zeta$$

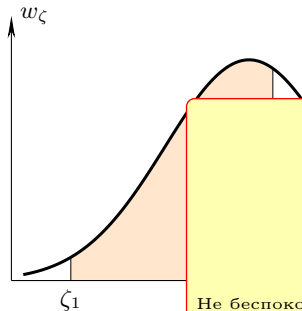
- Два важных частных случая:

$$\text{среднее: } \langle \zeta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta w_\zeta d\zeta$$

$$\text{дисперсия: } \sigma_\zeta^2 = \langle (\zeta - \langle \zeta \rangle)^2 \rangle = \langle \zeta^2 \rangle - \langle \zeta \rangle^2 > 0$$

Случайные величины для физиков

«случайность» величины ζ мы будем понимать интуитивно



- Случайная величина принимает разные значения от измерения к измерению

- $w(\zeta)$ или w_ζ — функция плотности вероятности (PDF).
еще используют (математических ожиданий):

и не забудь про нормировку!

$$\langle 1 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} w_\zeta d\zeta = 1$$

Не беспокойся, куда-нибудь ты обязательно попадешь, — сказал Кот

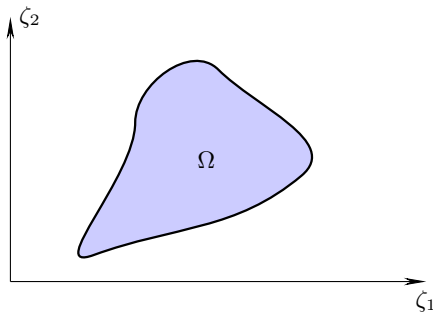
$$P(\zeta \in [\zeta_1; \zeta_2]) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} w(\zeta) d\zeta$$

среднее: $\langle \zeta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta w_\zeta d\zeta$

дисперсия: $\sigma_\zeta^2 = \langle (\zeta - \langle \zeta \rangle)^2 \rangle = \langle \zeta^2 \rangle - \langle \zeta \rangle^2 > 0$

Случайные величины для физиков

с наборами случайных величин $X = (\zeta_1, \dots, \zeta_N)$ мы работаем аналогично



$$P(X \in \Omega) = \int_{\Omega} w(X) dX$$

не «объем» Ω !!!

- $w(X)$ или w_X — многомерная PDF
- Можно исключить из рассмотрения одну из величин. Для этого $w(X)$ надо проинтергрировать по ней:

$$w(\zeta_1, \zeta_2) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) d\zeta_3 \quad \text{маргинальная плотность}$$

- Средние считаются аналогично:

$$\langle f(X) \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(X) w_X dX$$

- Вместо дисперсий — ковариационная матрица:

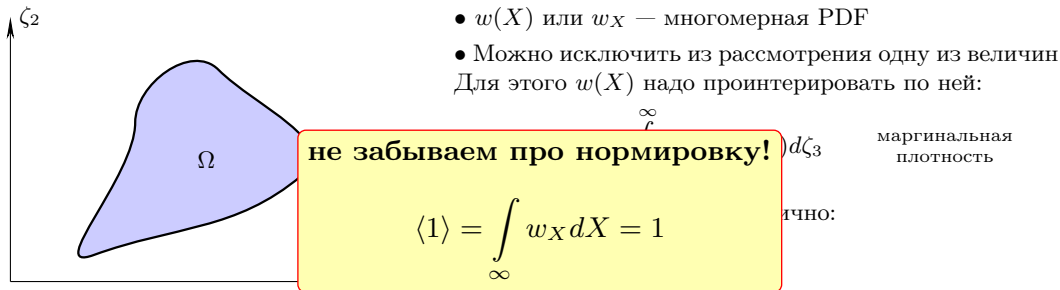
$$K_{ij} = K_{ji} = \langle \zeta_i \zeta_j \rangle - \langle \zeta_i \rangle \langle \zeta_j \rangle$$

- Если величины из X статистически независимы, то K_{ij} — диагональная матрица, а $w(X)$ факторизуется:

$$w_X = \prod_{i=1}^N w(\zeta_i)$$

Случайные величины для физиков

с наборами случайных величин $X = (\zeta_1, \dots, \zeta_N)$ мы работаем аналогично



$$P(X \in \Omega) = \int_{\Omega} w(X) dX$$

не «объем» Ω !!!

• Вместо дисперсий — ковариационная матрица:

$$K_{ij} = K_{ji} = \langle \zeta_i \zeta_j \rangle - \langle \zeta_i \rangle \langle \zeta_j \rangle$$

• Если величины из X статистически независимы, то K_{ij} — диагональная матрица, а $w(X)$ факторизуется:

$$w_X = \prod_{i=1}^N w(\zeta_i)$$

Примеры случайных физических величин

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА (1860)

Проекции скорости частицы, взятые в разные моменты времени
или у случайно выбранной частицы

$$w(v_x, v_y, v_z) = \frac{1}{Z_K} \exp \left(-\frac{m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT} \right)$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬЦМАНА (1870)

Координаты частицы, взятые в разные моменты времени
или у случайно выбранной частицы

$$w(x, y, z) = \frac{1}{Z_\Pi} \exp \left(-\frac{\Pi(x, y, z)}{kT} \right), \text{ где } \Pi(x, y, z) \text{ — потенциальная энергия}$$

КАНОНИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГИББСА (1902)

Набор всех обобщенных координат и импульсов $X = (\mathbf{q}..., \mathbf{p}...)$ всех частиц в куске вещества

$$w(X) = \frac{1}{Z} \exp \left(-\frac{\mathcal{H}(X)}{kT} \right), \text{ где } \mathcal{H}(X) \text{ — гамильтониан (что??)}$$

Распределение Максвелла

технически, это тройной Гаусс

$$w(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}\right)$$

- Все компоненты скорости распределены одинаково и независимо:

$$w(\mathbf{v}) = w(v_x)w(v_y)w(v_z)$$

$$w(v_i) = \mathcal{N}(0, \sigma^2), \text{ где } \sigma^2 = kT/m. \text{ В частности } \langle v_i^2 \rangle = kT/m$$

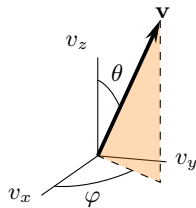
- Очень просится переход от декартовых проекций к «модуль-направлению»:

$$\mathbf{v} = v(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

Вероятность неизменна: $w(v_x, v_y, v_z)|dv_x dv_y dv_z| = w(v, \theta, \varphi)|dv d\theta d\varphi|$, поэтому

$$w(v, \theta, \varphi) = w(v_x, v_y, v_z) \left| \frac{\partial(v_x, v_y, v_z)}{\partial(v, \theta, \varphi)} \right| = \frac{v^2 \sin \theta}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right)$$

Проинтегрируем по углам: $w(v) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} w_{v\theta\varphi} d\theta d\varphi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{v^2}{\sigma^3} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right)$



Распределение Максвелла

технически, это тройной Гаусс

$$w(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT} \right)$$

- Все компоненты $w(\mathbf{v}) =$

$$w(v_i)$$

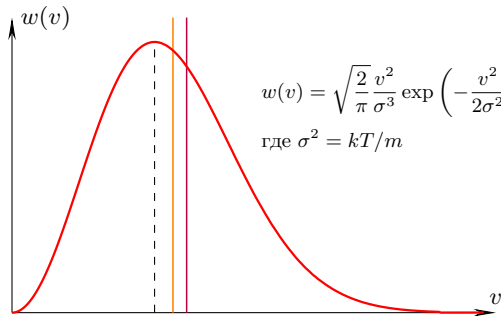
$$w(v_i)$$

- Очень просится п

$$\mathbf{v} = v(\mathbf{e}_r)$$

Вероятность неизм

$$w(v, \theta, \varphi)$$



$$w(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{v^2}{\sigma^3} \exp \left(-\frac{v^2}{2\sigma^2} \right)$$

$$\text{где } \sigma^2 = kT/m$$

$$v_{\max} = \sigma\sqrt{2}$$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma$$

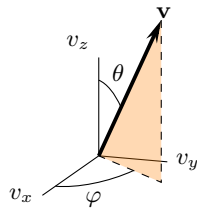
$$\langle v^2 \rangle = 3\sigma^2$$

Проинтегрируем по

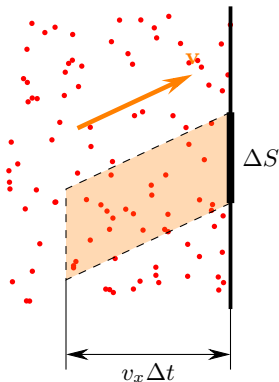
ию»:

ому

$$\left(\frac{v^2}{2} \right)$$



Давление идеального газа



Рассмотрим площадку ΔS на стенке сосуда с газом внутри.

Рассмотрим молекулы со скоростью $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$.

Из них за время Δt до стенки долетят молекулы, находящиеся в подсвеченном объеме $\Delta V = v_x \Delta t \Delta S$

Их число $dN_{\mathbf{v}} = n \Delta V w(\mathbf{v}) dv_x dv_y dv_z$, где n — концентрация.
 все молекулы $\times$ доля со скоростью $\mathbf{v}$

При столкновении x -импульс меняется с mv_x на $-mv_x$.

Импульс, переданный этими молекулами, равен $2mv_x \cdot dN_{\mathbf{v}}$:

$$dp_{x,\mathbf{v}} = 2nm\Delta S\Delta t \cdot v_x^2 w(\mathbf{v}) dv_x dv_y dv_z$$

Полный переданный импульс найдем, проинтегрировав по v_y и v_z от $-\infty$ до ∞ и по v_x от 0 до ∞ .

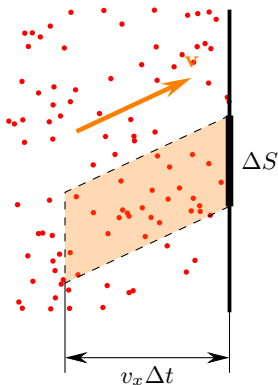
Поскольку $w(\mathbf{v}) = w(v_x)w(v_y)w(v_z)$, интеграл распадается на произведение трех, причем интегралы по v_y и v_z дают 1 (нормировка). В итоге, учитывая четность $w(v_x)$

$$\Delta p_x = 2nm\Delta S\Delta t \int_0^{\infty} v_x^2 w(v_x) dv_x = nm\Delta S\Delta t \langle v_x^2 \rangle \Rightarrow$$

$$p = \frac{\Delta p_x}{\Delta t \Delta S} = nm \langle v_x^2 \rangle = nkT$$

уравнение состояния идеального газа

Статистика истечения из отверстия



Пусть теперь газ истекает из отверстия площадью ΔS .

Число вылетевших молекул со скоростью $\mathbf{v}$:

$$dN_{\mathbf{v}} = n \Delta S v_x \Delta t \cdot w(\mathbf{v}) dv_x dv_y dv_z$$

Найдем полное число вылетающих молекул интегрированием по v_y и v_z от $-\infty$ до ∞ и по v_x от 0 до ∞ :

$$\Delta N = n \Delta S \Delta t \int_0^{\infty} v_x w(v_x) dv_x = n \Delta S \Delta t \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} = n \Delta S \Delta t \frac{\langle v \rangle}{4}$$

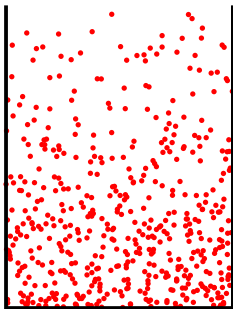
Это нормировочная константа для вылетающих молекул:

$$w_{\text{out}}(\mathbf{v}) = \frac{dN_{\mathbf{v}}}{\Delta N \cdot dv_x dv_y dv_z} = \sqrt{2\pi} \frac{v_x}{\sigma} w(\mathbf{v})$$

Перейдем к языку «модуль-направление», но угол θ будем отсчитывать от оси Ox :

$$w_{\text{out}}(v, \theta, \varphi) = v^2 \sin \theta \cdot w_{\text{out}}(\mathbf{v}) = \frac{\sin 2\theta}{4\pi} \frac{v^3}{\sigma^4} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right) \Rightarrow w_{\text{out}}(v) = \frac{v^3}{2\sigma^4} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right)$$

Простейшее распределение Больцмана



$$w(z) = \frac{1}{z_0} \exp\left(-\frac{z}{z_0}\right)$$

Рассмотрим газ в прямом стакане «без крышки».

Потенциальная энергия молекулы газа в поле тяжести $\Pi(z) = mgz$.

Соответственно, распределение для координат (x, y, z) имеет вид

$$w(x, y, z) = \frac{1}{Z_{\Pi}} \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) \equiv \frac{1}{Z_{\Pi}} \exp\left(-\frac{z}{z_0}\right), \text{ где } z_0 = \frac{kT}{mg}$$

Координаты x и y распределены равномерно, интеграл по ним дает умножение на площадь стакана S :

$$w(z) = \frac{S}{Z_{\Pi}} \exp\left(-\frac{z}{z_0}\right), \text{ причем } 1 = \int_0^{\infty} w(z) dz = \frac{z_0 S}{Z_{\Pi}}$$

Среднее значение: $\langle z \rangle = z_0$, **дисперсия:** $\sigma_z^2 = z_0^2$.

Если в сосуде всего N частиц, то в маленьком объеме ΔV находится $\Delta N = Nw(x, y, z)\Delta V$.

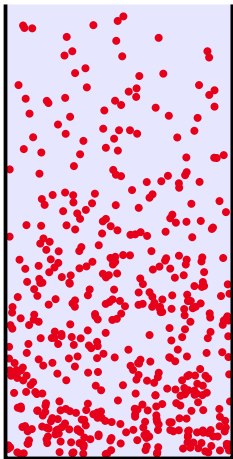
Следовательно, локальная концентрация $n(x, y, z) = \frac{\Delta N}{\Delta V} = Nw(x, y, z)$.

Концентрация экспоненциально убывает с высотой, если считать $T = \text{const}$.

При этом $p \sim n$ и также экспоненциально убывает с высотой (барометрическая формула).

Измерение постоянной Больцмана

Опыты Перрена (1908, нобелевская премия в 1926)



- Частицы со средним диаметром d и плотностью ρ взвешены в жидкости с чуть меньшей плотностью ρ_0 . На частицы действует не только сила тяжести, но и сила Архимеда:

$$ma_z = mg - \rho_0 g V \quad \Rightarrow \quad a_z = g \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right)$$

- Частицы во много раз тяжелее молекул, но за счет силы Архимеда создаются условия практически нулевой плавучести, в которых уже проявляется статистика Больцмана:

$$n(x, y, z) \sim w(x, y, z) \sim \exp \left(-\frac{ma_z z}{kT} \right)$$

- Измеряем зависимость $n(z)$, линеаризуем и находим к-т наклона:

$$\ln n(z) = -\frac{ma_z}{kT} z + \text{const}, \text{ если } \alpha \equiv \frac{ma_z}{kT}, \text{ то } k = \frac{ma_z}{\alpha T}$$

описанный эксперимент является частью опытов Перрена, в которых k определялась из анализа броуновского движения