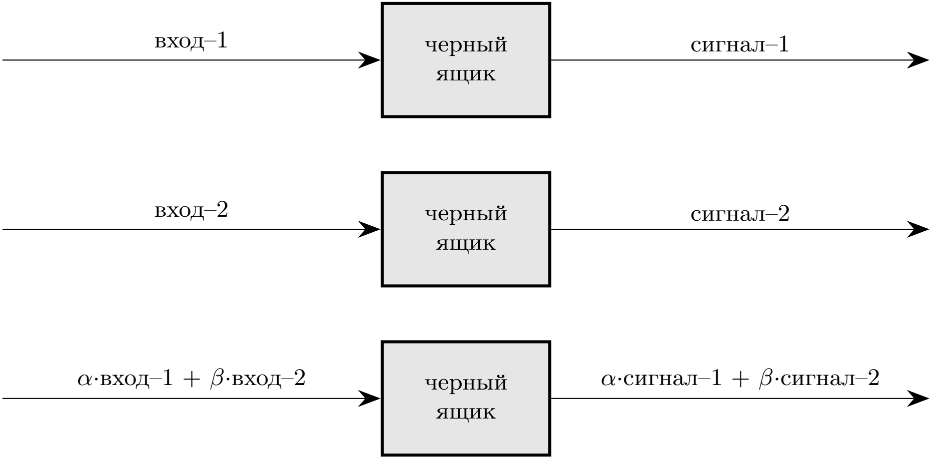
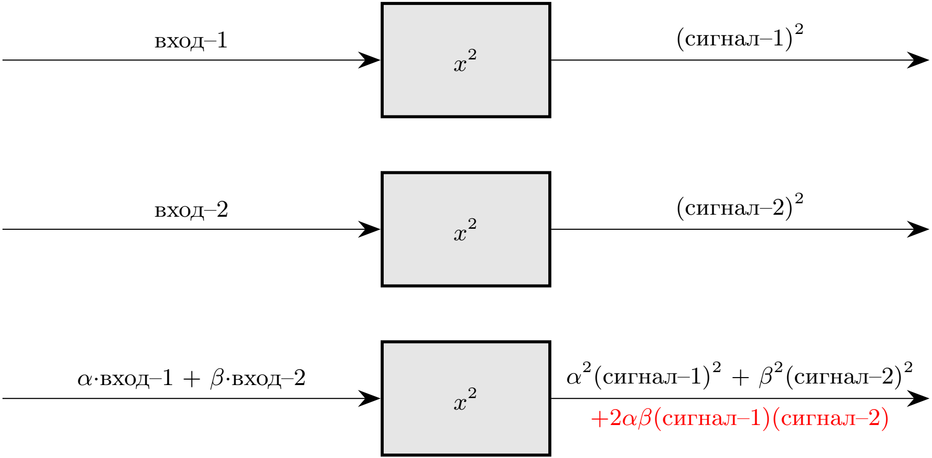
Лекция 0
Нелинейную?

Линейные системы



работает принцип суперпозиции

Пример нелинейной системы

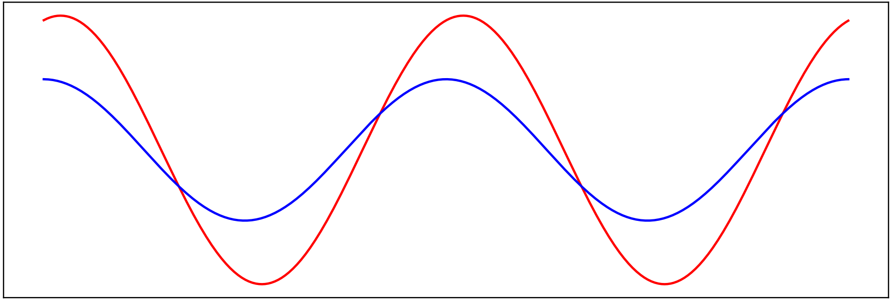


принцип суперпозиции не работает

Одномерный осциллятор (линейный)

линейное неоднородное уравнение колебаний

$$\ddot{x}(t) + 2\delta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = F_0\cos(0.66\omega_0 t)$$



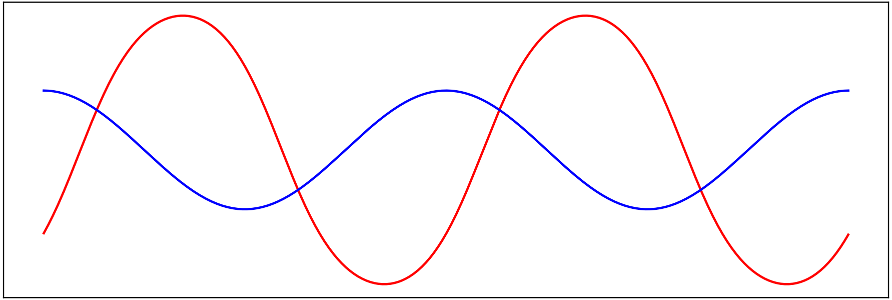
$x(t)$ в итоге колеблется гармонически с частотой $0.66\omega_0$

спектр отклика системы содержит только эту частоту

Одномерный осциллятор (нелинейный)

нелинейное неоднородное уравнение колебаний

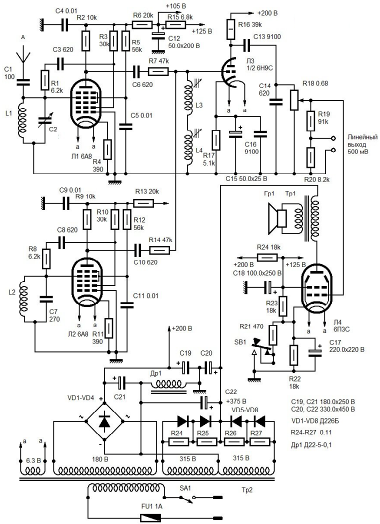
$$\ddot{x}(t) + 2\delta\dot{x}(t) + \omega_0^2 \sin(x(t)) = F_0 \cos(0.66\omega_0 t)$$



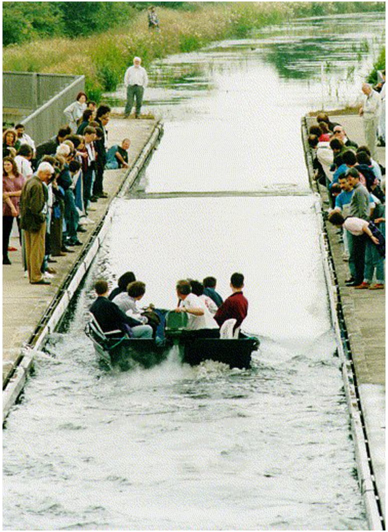
$x(t)$ в итоге колеблется негармонически

спектр отклика системы содержит помимо $0.66\omega_0$ и высшие гармоники

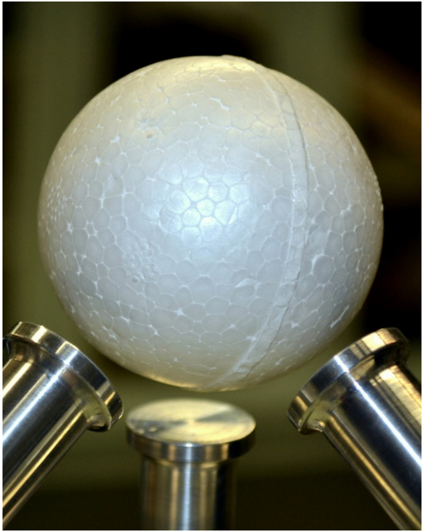
Нелинейная радиофизика



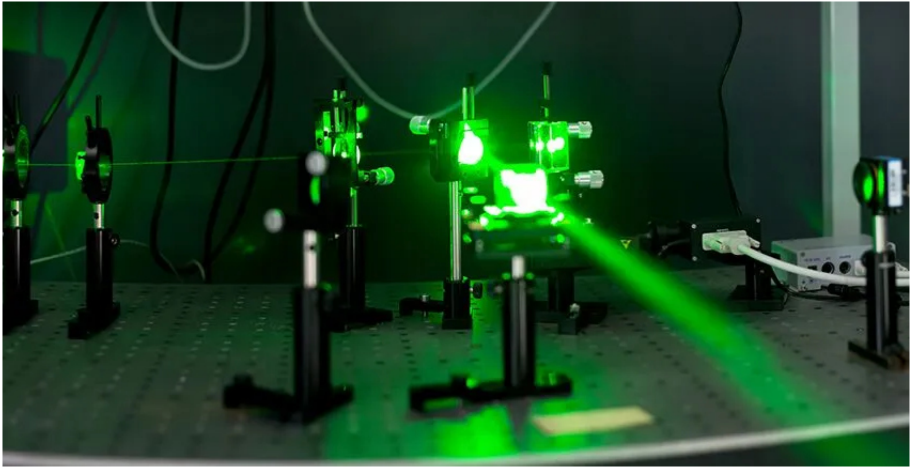
Нелинейная гидродинамика



Нелинейная акустика



Нелинейная оптика



Лекция 1
Нелинейность в оптике

Электромагнитное поле в вакууме

работаем в СГС

теорема Гаусса (но зарядов нет)

$$\operatorname{div}\tilde{\mathbf{E}} = 0$$

закон эл/м индукции

$$\operatorname{rot}\tilde{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\tilde{\mathbf{B}}}{\partial t}$$

теорема Стокса (но токов нет)

$$\operatorname{rot}\tilde{\mathbf{B}} = \frac{1}{c}\frac{\partial\tilde{\mathbf{E}}}{\partial t}$$

соленоидальность поля $\tilde{\mathrm{B}}$

$$\operatorname{div}\tilde{\mathbf{B}} = 0$$

тильды обозначают реальные осциллирующие физические величины

в вакууме вводить вспомогательные поля $\tilde{\mathbf{D}}$ и $\tilde{\mathbf{H}}$ не нужно

Электромагнитное поле в вакууме

работаем в СГС

теорема Гау

дукции

$\partial\tilde{\mathbf{B}}$

∂t

теорема Ст

ro

ь поля $\tilde{\mathbf{B}}$

волновое уравнение

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\tilde{\mathbf{E}} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{E}} - \Delta\tilde{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{rot}\,\tilde{\mathbf{B}}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{\mathbf{E}}}{\partial t^2}$$

$$\Delta\tilde{\mathbf{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = 0$$

решения в виде плоских волн

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{E}_0 \cos\left(\omega t - (\mathbf{k}\cdot\mathbf{R})\right)$$

где $\mathbf{E}_0 = \mathbf{const}$, $\omega = ck$ и $\mathbf{R} = (x, y, z)$

период $T = 2\pi/\omega$, длина волны $\lambda = 2\pi/k = cT$

тильды обозначают реальные осциллирующие физические величины

в вакууме вводить вспомогательные поля $\tilde{\mathbf{D}}$ и $\tilde{\mathbf{H}}$ не нужно

Электромагнитное поле в диэлектрике

в диэлектрике полагаем $\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{H}}$
рассматриваем среду без свободных зарядов

теорема Гаусса

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{E}} = 4\pi \tilde{\rho}'$$

закон эл/м индукции

$$\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t}$$

теорема Стокса

$$\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{B}} = \frac{1}{c}\frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}}{\partial t}$$

соленоидальность поля $\tilde{\mathbf{B}}$

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{B}} = 0$$

$\tilde{\mathbf{P}}$ — вектора поляризации вещества (дипольный момент единицы объема)
$\tilde{\rho}'$ — объемная плотность связанных зарядов, $\tilde{\rho}' = -\operatorname{div} \tilde{\mathbf{P}}$

Электромагнитное поле в диэлектрике

в диэлектрике полагаем $\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{H}}$
рассматриваем среду без свободных зарядов

волновое уравнение в диэлектрике

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\tilde{\mathbf{E}} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\tilde{\mathbf{E}} - \Delta\tilde{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \operatorname{rot}\tilde{\mathbf{B}}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{\mathbf{E}}}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{\mathbf{P}}}{\partial t^2}$$

$$\Delta\tilde{\mathbf{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{\mathbf{P}}}{\partial t^2} - 4\pi\operatorname{grad}\operatorname{div}\tilde{\mathbf{P}}$$

КАКАЯ ЗАВИСИМОСТЬ $\tilde{\mathbf{P}}[\tilde{\mathbf{E}}]$?

это определяет линейные
и **нелинейные** свойства вещества

$\tilde{\mathbf{P}}$ — вектора поляризации вещества (дипольный момент единицы объема)
$\tilde{\rho}'$ — объемная плотность связанных зарядов, $\tilde{\rho}' = -\operatorname{div}\tilde{\mathbf{P}}$

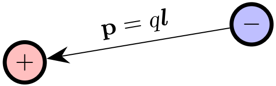
Вектор поляризации $\tilde{\mathrm{P}}$

определение

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \tilde{\mathbf{p}}_i$$

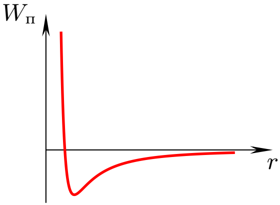
дипольный момент, усредненный по малому объему

диполь в представлении художника



диполи поворачиваются и деформируются под воздействием электрического поля

электрон в потенциальной яме



$W_{\text{п}}$ ассиметрична и непараболична

Материальное уравнение

Для $|\mathbf{E}| \ll |\mathbf{E}_{\text{ат}}|$ справедливо разложение $\tilde{\mathbf{P}}$ по «степеням» $\tilde{\mathbf{E}}$:

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{R}, t) = \int\limits_0^\infty d\tau_1 \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{R}_1 \; \chi^{(1)}(\mathbf{R}_1, \tau_1) \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{R} - \mathbf{R}_1, t - \tau_1)$$

$$+ \int\limits_0^\infty d\tau_1 d\tau_2 \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{R}_1 d\mathbf{R}_2 \; \chi^{(2)}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \tau_1, \tau_2) : \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{R} - \mathbf{R}_1, t - \tau_1)\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{R} - \mathbf{R}_2, t - \tau_2)$$

$$+ (\text{кубичная нелинейность} \sim \tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{E}}) + (\text{нелинейности высших порядков})$$

$\chi^{(1)}, \chi^{(2)} \ldots$ — тензорные функции диэлектрического отклика среды

они имеют, как минимум, такую же пространственную симметрию, как и среда

тензорные функции $\chi^{(1,2,3\ldots)}$ могут зависеть от координат и времени

τ — временное запаздывание
$\mathbf{R}$ — пространственная нелокальность

Ряд Фурье

сначала рассмотрим периодическую функцию $\tilde{f}(t)$ с периодом T

• Любая периодическая функция $\tilde{f}(t)$ с периодом T представима в виде суммы определенной константы и всех синусов-косинусов с периодами T, $T/2$, $T/3$...

$$\tilde{f}(t) = a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t), \qquad \text{где } \omega_n = 2\pi n/T$$

• Введем в сумму «отрицательные частоты», определив $a_{-n} = a_n$ и $b_{-n} = -b_n$, тогда

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n + \mathrm{i} b_n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t} \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t}$$

Здесь f_n — комплексные амплитудные коэффициенты со свойством $f_{-n} = f_n^*$

• Коэффициенты $a_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \tilde{f}(t)\cos(\omega_n t)dt$ и $b_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \tilde{f}(t)\sin(\omega_n t)dt$. В итоге

$$\boxed{\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t}, \qquad \text{где } f_n = \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{f}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n t}dt}$$

Ряд Фурье

сначала рассмотрим периодическую функцию $\tilde{f}(t)$ с периодом T

• Любая периодическая функция $\tilde{f}(t)$ с периодом T представима в виде суммы определенной константы и всех синусов-косинусов с периодами T, $T/2$, $T/3$...

$$\tilde{f}(t) = a_0 + 2\sum_{n=}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) \qquad \text{где } \omega_n = 2\pi n/T$$

равенство Парсеваля

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T \tilde{f}^2(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

• Введем в сумму «от ... $_{-n} = -b_n$, тогда

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \quad \ldots \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t}$$

Здесь f_n — комплексные амплитудные коэффициенты со свойством $f_{-n} = f_n^*$

• Коэффициенты $a_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int\limits_0^T \tilde{f}(t)\cos(\omega_n t)dt$ и $b_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int\limits_0^T \tilde{f}(t)\sin(\omega_n t)dt$. В итоге

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t}, \qquad \text{где } f_n = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \tilde{f}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n t}dt$$

Интеграл Фурье

теперь рассмотрим непереодическую $\tilde{f}(t)$

- Идея та же самая, но складываем синусы-косинусы со **всеми** частотами, а не дискретными. Сумма заменяется на интеграл (обратное преобразование Фурье):

$$\tilde{f}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} d\omega, \qquad \text{где } f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} dt \equiv \mathcal{F}\left[\tilde{f}(t)\right] \text{ — Фурье-образ } \tilde{f}(t)$$

Фурье-образ действительной $\tilde{f}(t)$ — комплекснозначная функция со свойством $f(-\omega) = f^*(\omega)$

- С помощью преобразования Фурье удобно брать производные:

$$\mathcal{F}\left[\tilde{f}'(t)\right] = -\mathrm{i}\omega f(\omega), \text{ аналогично производные } n\text{-ного порядка}$$

- И вычислять свертки (интересно, только, зачем?):

$$\mathcal{F}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t')\tilde{g}(t-t')dt'\right] = \mathcal{F}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t-t')\tilde{g}(t')dt'\right] = f(\omega)g(\omega)$$

Интеграл Фурье

теперь рассмотрим непереодическую $\tilde{f}(t)$

• Идея та же самая, но складываем синусы-косинусы со **всеми** частотами, а не дискретными. Сумма заменяется на интеграл (обратное преобразование Фурье):

$$\tilde{f}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\, e^{-i\omega t} \ldots \quad \ldots \frac{1}{\ldots} \int\limits^{\infty} \tilde{f}(\ldots) e^{i\omega t} \ldots = \mathcal{F}\left[\tilde{f}(\ldots)\right]$$ — Фурье-образ $\tilde{f}(t)$

Фурье-образ действит… …ойством $f(-\omega) = f^*(\omega)$

• С помощью преобра…

теорема Планшереля

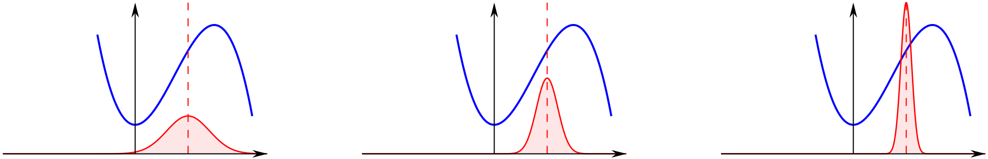
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}^2(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f^2(\omega)|d\omega$$

$$\mathcal{F}\left[\tilde{f}'(t)\right] = -\mathrm{i}\omega f(\omega),$$ аналогично производные n-ного порядка

• И вычислять свертки (интересно, только, зачем?):

$$\mathcal{F}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t')\tilde{g}(t-t')dt'\right] = \mathcal{F}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t-t')\tilde{g}(t')dt'\right] = f(\omega)g(\omega)$$

Дельта-функция Дирака



• Рассмотрим сужающуюся гауссову функцию $G(x - x_0; \sigma) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\dfrac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right)$

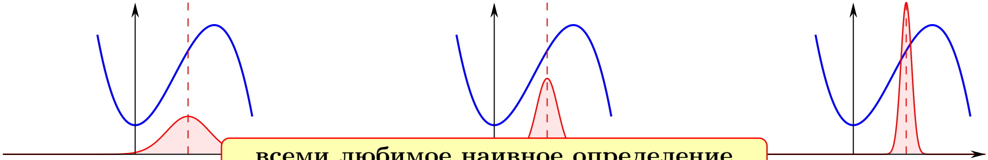
• Посчитаем ее свертку с произвольной функцией $f(x)$. При $\sigma \to 0$ имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x - x_0; \sigma)dx \approx f(x_0) \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x - x_0; \sigma)dx}_{=1\ \forall\sigma} \approx f(x_0)$$

• Дельта-функция Дирака $\delta(x - x_0)$ — это «предел сужающейся $G(x - x_0)$» с бесконечно узким и бесконечно высоким графиком. Для нее верно **точное** равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0)$$ — основное свойство дельта-функции

Дельта-функция Дирака



всеми любимое наивное определение

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ +\infty, & x = 0 \end{cases}$$

и при этом $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$

- Рассмотрим сужающ… …кр $\left(-\dfrac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right)$
- Посчитаем ее свертк… …еем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x-x_0;\sigma\ldots \quad \ldots \underbrace{\int\limits_{-\infty}\ldots}_{=1\ \forall\sigma}$$

- Дельта-функция Дирака $\delta(x-x_0)$ — это «предел сужающейся $G(x-x_0)$» с бесконечно узким и бесконечно высоким графиком. Для нее верно **точное** равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0) \text{ — основное свойство дельта-функции}$$

Фурье преобразование и дельта-функция

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0)}$$

- Фурье-образ дельта-функции это константа («смешение всех частот»):

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}dt = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\cdot 0} = \frac{1}{2\pi} \quad \Leftrightarrow \quad 2\pi\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}d\omega$$

- Соответственно, Фурье-образ константы это дельта-функция («нет частот, кроме нулевой»):

$$\mathcal{F}[1] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}d\omega = \delta(\omega)$$

- Наконец, Фурье-образ косинуса это две дельта функции (частоты $+\omega_0$ и $-\omega_0$)

$$\mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}dt = \frac{1}{2}\left(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right)$$

Разложение поля по плоским волнам

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{R},t) = \int \mathbf{E}(\omega,\mathbf{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{R})}d\omega d\mathbf{k}, \qquad \text{где } \mathbf{E}(-\omega,-\mathbf{k}) = \mathbf{E}^*(\omega,\mathbf{k})$$

$$\frac{\partial^n\tilde{\mathbf{E}}}{\partial t^n} = \int (-\mathrm{i}\omega)^n\mathbf{E}(\omega,\mathbf{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{R})}d\omega d\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial^n\tilde{\mathbf{E}}}{\partial x_m^n} = \int (\mathrm{i}k_m)^n\mathbf{E}(\omega,\mathbf{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{R})}d\omega d\mathbf{k}$$

В частности $\operatorname{div}\tilde{\mathbf{E}} \to (\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{E})$, $\quad \operatorname{rot}\tilde{\mathbf{E}} \to [\mathrm{i}\mathbf{k}\times\mathbf{E}]$, $\quad \Delta\tilde{\mathbf{E}} \to -k^2\mathbf{E}$

решение волнового уравнения в вакууме

$$\Delta\tilde{\mathbf{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = 0 \quad\Rightarrow\quad \int\left(-k^2+\frac{\omega^2}{c^2}\right)\mathbf{E}(\omega,\mathbf{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{R})}d\omega d\mathbf{k} = 0 \quad\Rightarrow\quad \omega = ck$$

$$\operatorname{div}\tilde{\mathbf{E}} = 0 \quad\Rightarrow\quad \int(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}(\omega,\mathbf{k}))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{R})}d\omega d\mathbf{k} = 0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{k}\perp\mathbf{E}(\omega,\mathbf{k})$$

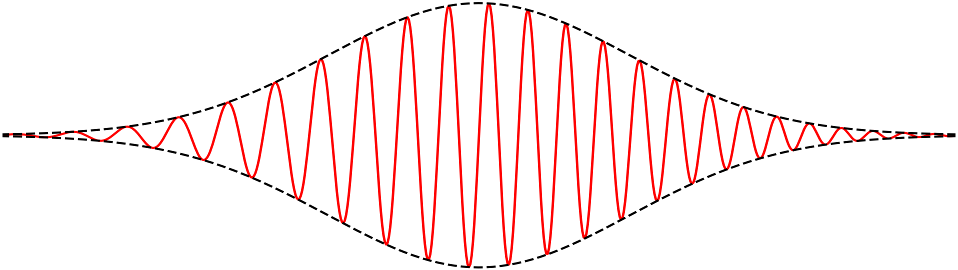
Квазимонохроматическое приближение

Суть: $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{R},t) = \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{R},t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} + c.c.$

где $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{R},t)$ — «медленная» функция t, комплекснозначная (комплексная амплитуда) (т.е. изменение $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ за период оптических колебаний $2\pi/\omega_0$ несущественно)

В предельном случае чисто монохроматического излучения $\partial\boldsymbol{\mathcal{E}}/\partial t = 0$.

Временная развертка $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{R},t)$ — быстро-осциллирующая «синусоида»,
чья амплитуда и фаза медленно меняются.



Поле $\tilde{\mathrm{P}}$ в кв.-монохром. приближении

на этом слайде мы временно не обращаем внимания на «тензорность»
и не рассматриваем пространственную нелокальность отклика

линейная часть

$$P_1 \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} \int\limits_0^\infty \chi^{(1)}(\tau_1)\mathcal{E}(\mathbf{R}, t-\tau_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau_1} d\tau_1 \to \mathcal{P}_1(\mathbf{R}, t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}$$

квадратичная часть

$$P_2^{(a)} \to \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_0 t} \int\limits_0^\infty \chi^{(2)}(\tau_1, \tau_2)\mathcal{E}(\mathbf{R}, t-\tau_1)\mathcal{E}(\mathbf{R}, t-\tau_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0(\tau_1+\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \to \mathcal{P}_2^{(a)}(\mathbf{R}, t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_0 t}$$

$$P_2^{(b)} \to 1 \cdot \int\limits_0^\infty \chi^{(2)}(\tau_1, \tau_2)\mathcal{E}(\mathbf{R}, t-\tau_1)\mathcal{E}^*(\mathbf{R}, t-\tau_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0(\tau_1-\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \to \mathcal{P}_2^{(b)}(\mathbf{R}, t) \cdot 1$$

и так далее...

Нелинейно-оптические эффекты

- Генерация второй гармоники: $\omega + \omega \to 2\omega$
  Основной луч порождает луч на удвоенной частоте
- Оптическое выпрямление: $\omega - \omega \to 0$
  Основной луч наводит постоянное электрическое поле
- Генерация суммарной/разностной частоты: $\omega_1 \pm \omega_2 \to \omega_3 = \omega_1 \pm \omega_2$
  Два основных луча порождают третий на суммарной/разностной частоте
- Генерация третьей гармоники: $\omega + \omega + \omega \to 3\omega$
  Основной луч порождает луч на утроенной частоте
- Квадратичный эффект Поккельса: $\omega + \omega_1 - \omega_1 \to \omega$
  Параметры среды для первого луча меняются внешним переменным полем
- Эффект Керра: $\omega + \omega - \omega \to \omega$
  Луч меняет параметры среды для самого себя

Нелинейно-оптические эффекты

- Спонтанное параметрическое рассеяние: $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 \to \omega_1 + \omega_2$
  Основной луч на высокой частоте порождает два луча на более низких частотах

- Рамановское рассеяние: $\omega \to \omega \pm \omega_{\text{пер}}$
  Основной луч порождает в среде еще два,
  частоты которых сдвинуты на частоту молекулярных переходов

- Рассеяние Мандельштама-Бриллюэна: $\omega \to \omega \pm \omega_{\text{акуст}}$
  Основной луч порождает в среде дополнительные пары лучей,
  частоты которых сдвинуты на частоту акустических волн в среде

- Самоиндуцированная прозрачность
  Короткий световой импульс возбуждает среду,
  которая затем возвращает энергию обратно в импульс

- N-фотонное поглощение:
  Луч на частоте ω поглощается в среде с частотой перехода $N\omega$