Лекция 3
Генерация второй гармоники

Плосковолновое приближение

нелинейное волновое уравнение

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\tilde{\mathbf{E}} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{\mathbf{P}}}{\partial t^2} \Leftrightarrow \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\tilde{\mathbf{E}} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{\mathbf{D}}^{\mathrm{L}}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{\mathbf{P}}^{\mathrm{NL}}}{\partial t^2}$$

где $\tilde{\mathbf{D}}^{\mathrm{L}} = \tilde{\mathbf{E}} + 4\pi\tilde{\mathbf{P}}^{\mathrm{L}}$, вместо $\chi^{(1)}(\bullet)$ используем $\varepsilon(\bullet) = 1 + 4\pi\chi^{(1)}(\bullet)$

- Самая простая идея — плоские волны с медленно меняющимися амплитудами:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{R},t) = \boldsymbol{\mathcal{E}}(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}k_\omega z} + c.c.,\ \text{причем}\ \boldsymbol{\mathcal{D}}(z) = \varepsilon(\omega)\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}(z) = \varepsilon_\omega\boldsymbol{\mathcal{E}}(z)\ \text{(соб. вектор!)}$$

$$\tilde{\mathbf{P}}^{\mathrm{NL}}(\mathbf{R},t) = \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\mathrm{NL}}(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}k_\Sigma z} + c.c.,\ \text{где}\ k_\Sigma\ \text{не обязательно равен}\ k_\omega = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mathrm{Re}\,\varepsilon_\omega} \equiv \frac{\omega}{c}n_\omega$$

- Тогда $\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{E}} = \partial E_z/\partial z = 0$, а значит

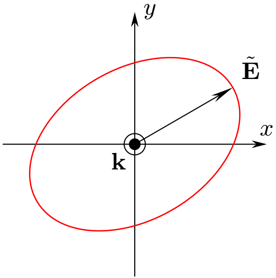
$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\tilde{\mathbf{E}} = -\Delta[\boldsymbol{\mathcal{E}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\omega z}]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + c.c. \approx -\left(2\mathrm{i}k_\omega\frac{d\boldsymbol{\mathcal{E}}}{dz} - k_\omega^2\boldsymbol{\mathcal{E}}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}k_\omega z} + c.c.$$

конечный результат

$$\frac{d\boldsymbol{\mathcal{E}}}{dz} + \delta_\omega\boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{2\pi\mathrm{i}k_\omega}{n_\omega^2}\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\mathrm{NL}}\exp\left[\mathrm{i}(k_\Sigma - k_\omega)z\right],\quad \text{где}\ \delta_\omega \equiv \frac{k_\omega\,\mathrm{Im}\,\varepsilon_\omega}{2n_\omega^2}\ \text{— к-т линейного поглощения}$$

Описание состояния поляризации

квазимонохроматическое параксиальное приближение



конец вектора $\tilde{\mathbf{E}}$
описывает эллипс
за один период волны

• В заданной точке пространства поле $\tilde{\mathbf{E}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{E}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + c.c$, т.е.

$$E_x(t) = 2|\mathcal{E}_x| \cos(\omega t - \arg(\mathcal{E}_x))$$
$$E_y(t) = 2|\mathcal{E}_y| \cos(\omega t - \arg(\mathcal{E}_y))$$

• Конец $\tilde{\mathbf{E}}$ описывает эллипс в плоскости $\perp \mathbf{k}$. Ориентация и форма эллипса задается вектором комплексной амплитуды $\boldsymbol{\mathcal{E}}$:

при $\arg \mathcal{E}_y - \arg \mathcal{E}_x = 0 \bmod \pi$ поляризация линейная
при $\mathcal{E}_x = \pm \mathrm{i} \mathcal{E}_y$ поляризация круговая

• Вектор $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ можно раскладывать по различным компонентам. Кроме линейно-поляризованных волн, рассмотренных выше, часто используют волны с круговой поляризацией:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_R \mathbf{e}_R + \mathcal{E}_L \mathbf{e}_L \equiv \frac{\mathcal{E}_x - \mathrm{i}\mathcal{E}_y}{\sqrt{2}} \frac{\mathbf{e}_x + \mathrm{i}\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}} + \frac{\mathcal{E}_x + \mathrm{i}\mathcal{E}_y}{\sqrt{2}} \frac{\mathbf{e}_x - \mathrm{i}\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}}$$

выбор базиса для $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ диктуется соображениями удобства
уравнение для вектора $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ — это **пара** уравнений для его компонент

Генерация второй гармоники

связанные уравнения для волн на частотах 2ω и ω

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{\mathcal{E}}_2}{dz} + \delta_2 \boldsymbol{\mathcal{E}}_2 = \dfrac{2\pi \mathrm{i} k_{2\omega}}{n_{2\omega}^2} \boldsymbol{\mathcal{P}}_2^{\mathrm{NL}} \exp\left[\mathrm{i}(2k_\omega - k_{2\omega})z\right] \\ \dfrac{d\boldsymbol{\mathcal{E}}_1}{dz} + \delta_1 \boldsymbol{\mathcal{E}}_1 = \dfrac{2\pi \mathrm{i} k_{\omega}}{n_{\omega}^2} \boldsymbol{\mathcal{P}}_1^{\mathrm{NL}} \exp\left[\mathrm{i}(k_{2\omega} - 2k_\omega)z\right] \end{cases}$$

- Мы считаем поляризацию волн постоянной: $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{1,2}(z) = \mathbf{e}_{1,2}\mathcal{E}_{1,2}(z)$. Тогда

$$\mathcal{P}_{2i}^{\mathrm{NL}} = \chi_{ijm}(\omega,\omega) e_{1j} e_{1m} \mathcal{E}_1^2 \Rightarrow (\mathbf{e}_2 \boldsymbol{\mathcal{P}}_2^{\mathrm{NL}}) = \underbrace{\chi_{ijm}(\omega,\omega) e_{2i} e_{1j} e_{1m}}_{\equiv \chi_{211}(\omega,\omega)} \mathcal{E}_1^2$$

$$\mathcal{P}_{1i}^{\mathrm{NL}} = 2\chi_{ijm}(-\omega,2\omega) e_{1j}^* e_{2m} \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_2 \Rightarrow (\mathbf{e}_1 \boldsymbol{\mathcal{P}}_1^{\mathrm{NL}}) = 2\underbrace{\chi_{ijm}(-\omega,2\omega) e_{1i} e_{1j}^* e_{2m}}_{\equiv \chi_{112}(-\omega,2\omega)} \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_2$$

Множитель 2 возникает из-за двух симметричных вкладов $\chi_{ijm}(-\omega,2\omega)$ и $\chi_{ijm}(2\omega,-\omega)$

- Введем эффективные коэффициенты нелинейности $\gamma_{1,2}$:

$$2\chi_{112}\frac{2\pi \mathrm{i} k_\omega}{n_\omega^2} \equiv \mathrm{i}\frac{\gamma_1}{n_\omega}, \quad \chi_{211}\frac{2\pi \mathrm{i} k_{2\omega}}{n_{2\omega}^2} \equiv \mathrm{i}\frac{\gamma_2}{n_{2\omega}}, \text{ заметим, что } \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{\chi_{211}^{(2)}(\omega,\omega)}{\chi_{112}^{(2)}(-\omega,2\omega)}$$

Генерация второй гармоники

связанные уравнения для волн на частотах 2ω и ω

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{\mathcal{E}}_2}{dz} + \delta_2 \boldsymbol{\mathcal{E}}_2 = \dfrac{2\pi \mathrm{i} k_{2\omega}}{n_{2\omega}^2} \boldsymbol{\mathcal{P}}_2^{\mathrm{NL}} \exp\left[\mathrm{i}(2k_\omega - k_{2\omega})z\right] \\ \dfrac{d\boldsymbol{\mathcal{E}}_1}{dz} + \delta_1 \boldsymbol{\mathcal{E}}_1 = \dfrac{2\pi \mathrm{i} k_{\omega}}{n_{\omega}^2} \boldsymbol{\mathcal{P}}_1^{\mathrm{NL}} \exp\left[\mathrm{i}(k_{2\omega} - 2k_\omega)z\right] \end{cases}$$

- Мы считаем поляризацию волн постоянной: $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{1,2}(z) = \mathbf{e}_{1,2}\mathcal{E}_{1,2}(z)$. Тогда

$\mathcal{P}_{2i}^{\mathrm{NL}} = \chi$

$\mathcal{P}_{1i}^{\mathrm{NL}} = 2$

система укороченных уравнений для скалярных амплитуд

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathcal{E}_2}{dz} + \delta_2 \mathcal{E}_2 = \mathrm{i}\dfrac{\gamma_2}{n_{2\omega}} \mathcal{E}_1^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta k z} \\ \dfrac{d\mathcal{E}_1}{dz} + \delta_1 \mathcal{E}_1 = \mathrm{i}\dfrac{\gamma_1}{n_{\omega}} \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta k z} \end{cases}$$

где $\Delta k = 2k_\omega - k_{2\omega} = \dfrac{2\omega}{c}(n_\omega - n_{2\omega})$ — **волновая расстройка**

Множитель ... $(2\omega, -\omega)$

- Введем эффективные коэффициенты нелинейности $\gamma_{1,2}$:

$$2\chi_{112}\frac{2\pi \mathrm{i} k_\omega}{n_\omega^2} \equiv \mathrm{i}\frac{\gamma_1}{n_\omega}, \quad \chi_{211}\frac{2\pi \mathrm{i} k_{2\omega}}{n_{2\omega}^2} \equiv \mathrm{i}\frac{\gamma_2}{n_{2\omega}}, \text{ заметим, что } \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{\chi_{211}^{(2)}(\omega,\omega)}{\chi_{112}^{(2)}(-\omega, 2\omega)}$$

Вопросы сохранения энергии

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathcal{E}_2}{dz} + \delta_2\mathcal{E}_2 = \mathrm{i}\,\dfrac{\gamma_2}{n_{2\omega}}\mathcal{E}_1^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta kz} \\ \dfrac{d\mathcal{E}_1}{dz} + \delta_1\mathcal{E}_1 = \mathrm{i}\,\dfrac{\gamma_1}{n_{\omega}}\mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta kz} \end{cases}$$

следствие

$$\frac{d}{dz}\left(n_\omega|\mathcal{E}_1|^2 + n_{2\omega}|\mathcal{E}_2|^2\right) = -2\delta_1 n_\omega|\mathcal{E}_1|^2 - 2\delta_2 n_{2\omega}|\mathcal{E}_2|^2 + \left[\mathrm{i}(\gamma_2 - \gamma_1^*)\mathcal{E}_1^2\mathcal{E}_2^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta kz} + c.c.\right]$$

комбинации «$n|\mathcal{E}|^2$» пропорциональны потокам энергии волн

если $\gamma_2 = \gamma_1^* \equiv \gamma \;\Leftrightarrow\; \chi^{(2)}_{112}(2\omega, -\omega) = \left(\chi^{(2)}_{211}(\omega,\omega)\right)^*$,

то энергопотери связаны только с линейным поглощением

приведенное равенство является частным случаем **соотношений Клейнмана**

$$\chi^{(2)}_{ijk}(\omega_1,\omega_2) = \chi^{(2)}_{ikj}(\omega_2,\omega_1) = \left(\chi^{(2)}_{jik}(\omega_1+\omega_2,-\omega_2)\right)^* = \left(\chi^{(2)}_{jki}(-\omega_2,\omega_1+\omega_2)\right)^*$$

если значения $\chi^{(2)}$ действительны, сопряжение можно убрать

Низкоэффективная генерация

временно пренебрежем поглощением

- Начальные условия для задачи генерации таковы: $\mathcal{E}_1(0) = \mathcal{E}_{10}$, $\mathcal{E}_2(0) = 0$. На входе есть поле на частоте ω, но нет поля на частоте 2ω. Рассмотрим сначала режим, в котором поле частоте ω истощается слабо, т.е. $\mathcal{E}_1(z) \approx \mathcal{E}_{10}$ и $|\mathcal{E}_2| \ll |\mathcal{E}_{10}|$ (**приближение заданного поля**). Тогда

$$\frac{d\mathcal{E}_2}{dz} = \mathrm{i}\frac{\gamma}{n_{2\omega}}\mathcal{E}_1^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta k z} \approx \mathrm{i}\frac{\gamma\mathcal{E}_{10}^2}{n_{2\omega}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta k z}$$

- Это уравнение крайне просто решается:

$$\mathcal{E}_2(z) = \frac{\gamma\mathcal{E}_{10}^2}{n_{2\omega}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta k z} - 1}{\Delta k} = \frac{\mathrm{i}\gamma\mathcal{E}_{10}^2}{n_{2\omega}}\frac{\sin(\Delta k z/2)}{\Delta k/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta k z/2}, \quad \max|\mathcal{E}_2| \text{ при } z = \frac{\pi}{|\Delta k|} \equiv L_{\text{кор}}$$

- Интенсивность второй гармоники осциллирует вдоль оси Oz. Если $\Delta k = 0$, то формально $|\mathcal{E}_2(z)| = \dfrac{\gamma|\mathcal{E}_{10}|^2}{n_{2\omega}}z$ и $|\mathcal{E}_2|$ сравняется с $|\mathcal{E}_{10}|$ при $z = \dfrac{n_{2\omega}}{\gamma|\mathcal{E}_{10}|} \equiv L_{\text{нл}}$

условия применимости приближения заданного поля

$$\max\left|\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_{10}}\right| = \frac{2}{\pi}\frac{\gamma|\mathcal{E}_{10}|}{n_{2\omega}}\frac{\pi}{|\Delta k|} \sim \frac{L_{\text{кор}}}{L_{\text{нл}}} \ll 1$$

или, как вариант, взять «кристалл покороче»

Низкоэффективная генерация

временно пренебрежем поглощением

• Начальные условия для задачи генерации таковы: $\mathcal{E}_1(0) = \mathcal{E}_{10}$, $\mathcal{E}_2(0) = 0$. На входе есть поле на частоте ω, но нет поля на частоте 2ω. Рассмотрим сначала режим, в котором поле частоте ω истощается слабо, т.е. $\mathcal{E}_1(z) \approx \mathcal{E}_{10}$ и $|\mathcal{E}_2| \ll |\mathcal{E}_{10}|$ (**приближение заданного поля**). Тогда

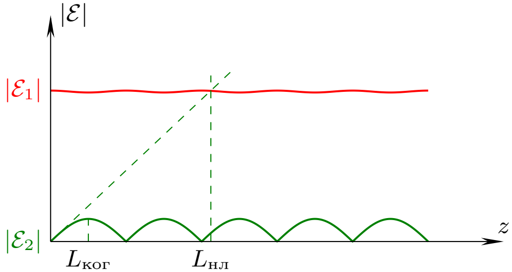
$$\frac{d\mathcal{E}_2}{dz} = \mathrm{i}\frac{\gamma}{n_{2\omega}}\mathcal{E}$$

• Это уравнение кр

$$\mathcal{E}_2(z) = \frac{\gamma\mathcal{E}_{10}^2}{n_{2\omega}} \quad \frac{\pi}{|\Delta k|} \equiv L_{\text{ког}}$$

• Интенсивность вт $k = 0$, то формально

$|\mathcal{E}_2(z)| = \dfrac{\gamma|\mathcal{E}_{10}|^2}{n_{2\omega}} z$ и



начальный рост $|\mathcal{E}_2|$ одинаков при любом Δk

но при $\Delta k = 0$ рост формально не ограничен

усл ... поля

$$\max\left|\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_{10}}\right| = \frac{2}{\pi}\frac{\gamma|\mathcal{E}_{10}|}{n_{2\omega}}\frac{\pi}{|\Delta k|} \sim \frac{L_{\text{ког}}}{L_{\text{нл}}} \ll 1$$

или, как вариант, взять «кристалл покороче»

Общий анализ системы

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathcal{E}_2}{dz} = \mathrm{i}\dfrac{\gamma}{n_{2\omega}}\mathcal{E}_1^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta k z} \\ \dfrac{d\mathcal{E}_1}{dz} = \mathrm{i}\dfrac{\gamma}{n_{\omega}}\mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta k z} \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_{1,2} = |\mathcal{E}_{1,2}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_{1,2}}$$

$$\frac{d|\mathcal{E}|^2}{dz} = \mathcal{E}^* \frac{d\mathcal{E}}{dz} + c.c.$$

$$\frac{1}{\mathcal{E}}\frac{d\mathcal{E}}{dz} = \frac{1}{|\mathcal{E}|}\frac{d|\mathcal{E}|}{dz} + \mathrm{i}\frac{d\varphi}{dz}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d|\mathcal{E}_2|^2}{dz} = -\dfrac{2\gamma}{n_{2\omega}} \operatorname{Im}\left(\mathcal{E}_1^2\mathcal{E}_2^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta k z}\right) \\ \dfrac{d|\mathcal{E}_1|^2}{dz} = \dfrac{2\gamma}{n_{\omega}} \operatorname{Im}\left(\mathcal{E}_1^2\mathcal{E}_2^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta k z}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_2}{dz} = \dfrac{\gamma}{n_{2\omega}|\mathcal{E}_2|^2} \operatorname{Re}\left(\mathcal{E}_1^2\mathcal{E}_2^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta k z}\right) \\ \dfrac{d\varphi_1}{dz} = \dfrac{\gamma}{n_{\omega}|\mathcal{E}_1|^2} \operatorname{Re}\left(\mathcal{E}_1^2\mathcal{E}_2^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta k z}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d|\mathcal{E}_2|}{dz} = -\dfrac{\gamma}{n_{2\omega}}|\mathcal{E}_1|^2 \sin\Phi \\ \dfrac{d|\mathcal{E}_1|}{dz} = \dfrac{\gamma}{n_{\omega}}|\mathcal{E}_1||\mathcal{E}_2| \sin\Phi \\ \dfrac{d\Phi}{dz} = \Delta k + \gamma\left(2\dfrac{|\mathcal{E}_2|}{n_\omega} - \dfrac{|\mathcal{E}_1|^2}{n_{2\omega}|\mathcal{E}_2|}\right)\cos\Phi \end{cases}$$

$$\Phi = 2\varphi_1 - \varphi_2 + \Delta k z$$

Первые интегралы

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathcal{E}_2}{dz} = \mathrm{i}\dfrac{\gamma}{n_{2\omega}}\mathcal{E}_1^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta k z} \\ \dfrac{d\mathcal{E}_1}{dz} = \mathrm{i}\dfrac{\gamma}{n_{\omega}}\mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta k z} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dz}\left(\mathcal{E}_1^2\mathcal{E}_2^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta k z}\right) = \mathrm{i}\gamma|\mathcal{E}_1|^2\left(2\frac{|\mathcal{E}_2|^2}{n_\omega} - \frac{|\mathcal{E}_1|^2}{n_{2\omega}}\right) + \mathrm{i}\Delta k \mathcal{E}_1^2\mathcal{E}_2^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta k z}$$

$$\frac{d}{dz}\,\mathrm{Re}\left(\mathcal{E}_1^2\mathcal{E}_2^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta k z}\right) = -\Delta k\,\mathrm{Im}\left(\mathcal{E}_1^2\mathcal{E}_2^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta k z}\right) = \frac{n_{2\omega}\Delta k}{2\gamma}\frac{d|\mathcal{E}_2|^2}{dz}$$

1) $n_\omega|\mathcal{E}_1|^2 + n_{2\omega}|\mathcal{E}_2|^2 = \text{const}$ (ЗСЭ)

2) $\dfrac{n_{2\omega}\Delta k}{2\gamma}|\mathcal{E}_2|^2 - \mathrm{Re}\left(\mathcal{E}_1^2\mathcal{E}_2^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta k z}\right) = \text{const}$

при $\mathcal{E}_2(0) = 0$ получаем

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_2}{dz} = \dfrac{\gamma}{n_{2\omega}|\mathcal{E}_2|^2}\mathrm{Re}\left(\mathcal{E}_1^2\mathcal{E}_2^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta k z}\right) = \dfrac{\Delta k}{2} \\ \dfrac{d\varphi_1}{dz} = \dfrac{\gamma}{n_{\omega}|\mathcal{E}_1|^2}\mathrm{Re}\left(\mathcal{E}_1^2\mathcal{E}_2^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta k z}\right) = \dfrac{\Delta k}{2}\dfrac{n_{2\omega}|\mathcal{E}_2|^2}{n_\omega|\mathcal{E}_1|^2} \end{cases}$$

при синхронизме фазы $\varphi_{1,2}$ не изменяются

Фазовый синхронизм ($\Delta k = 0$)

$$\begin{cases} \dfrac{d|\mathcal{E}_2|}{dz} = -\dfrac{\gamma}{n}|\mathcal{E}_1|^2 \sin\Phi \\[2mm] \dfrac{d|\mathcal{E}_1|}{dz} = \dfrac{\gamma}{n}|\mathcal{E}_1||\mathcal{E}_2| \sin\Phi \\[2mm] 0 = \gamma\left(2\dfrac{|\mathcal{E}_2|}{n} - \dfrac{|\mathcal{E}_1|^2}{n|\mathcal{E}_2|}\right)\cos\Phi \end{cases}$$

$\sin\Phi = -1$

т.к. сначала $\dfrac{d|\mathcal{E}_2|}{dz} > 0$

$$\begin{cases} \dfrac{d|\mathcal{E}_2|}{dz} = \dfrac{\gamma}{n}|\mathcal{E}_1|^2 \\[2mm] \dfrac{d|\mathcal{E}_1|}{dz} = -\dfrac{\gamma}{n}|\mathcal{E}_1||\mathcal{E}_2| \end{cases}$$

$n|\mathcal{E}_1|^2 + n|\mathcal{E}_2|^2 = n|\mathcal{E}_{10}|^2$

$$\frac{d|\mathcal{E}_2|/|\mathcal{E}_{10}|}{1 - |\mathcal{E}_2|^2/|\mathcal{E}_{10}|^2} = \frac{\gamma|\mathcal{E}_{10}|}{n}dz = \frac{dz}{L_{\text{нл}}}$$

$$|\mathcal{E}_2|(z) = |\mathcal{E}_{10}|\,\mathrm{th}\left(\frac{z}{L_{\text{нл}}}\right)$$

$$|\mathcal{E}_1|(z) = |\mathcal{E}_{10}|\,\mathrm{sech}\left(\frac{z}{L_{\text{нл}}}\right)$$