# Лекция 1

1. Получите из системы уравнений Максвелла для диэлектрической среды без свободных зарядов уравнение rot rot-задачи (слайд 10). Как раскрыть $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\tilde{\mathbf{E}}$ с учетом $\tilde{\rho}' = -\operatorname{div}\tilde{\mathbf{P}}$?

2. Как упростится материальное уравнение на слайде 12 в случае отсутствия (а) пространственной нелокальности отклика, (б) временного запаздывания отклика, (в) обоих эффектов [подсказка: интегралов будет становиться меньше].

3. Поясните переход от ряда Фурье к интегралу Фурье, домножив и разделив Фурье-сумму на разность частот соседних гармоник $\Delta\omega \equiv 2\pi/T$. Учтите, что при $T \to \infty$ эта разность частот фактически превращается в дифференциал $d\omega$. (слайды 13-14)

4. Докажите тождество (слайд 14)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t)\tilde{g}(t-\tau)d\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t-\tau)\tilde{g}(t)d\tau \tag{1}$$

5. Докажите, что функция $G(x-x_0;\sigma)$, определенная на слайде 15, при любых $x_0$ и $\sigma$ удовлетворяет условию нормировки

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x-x_0;\sigma)dx = 1 \tag{2}$$

6. Найдите Фурье-образ функции $G(x;\sigma)$ при $x_0 = 0$.

7. Докажите, что в интегралах

$$2\pi\delta(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}d\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}d\omega \tag{3}$$

действительно неважно, стоит в экспоненте минус или плюс (слайд 16).

8. Найдите Фурье-представление производных $\delta'(t)$ и $\delta''(t)$ при помощи тождества

$$2\pi\delta(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}d\omega \tag{4}$$

Используя полученные равенства, найдите Фурье-образы функций $\tilde{f}(t) = t$ и $\tilde{f}(t) = t^2$.

9. Почему на слайде 17 нам логичнее выбрать разные знаки в экспонентах для пространственного и временного Фурье-интеграла при разложении по плоским волнам?

10. Докажите тождества (слайд 17)

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\tilde{\mathbf{E}} &= \int (\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{E})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{R}}d\omega d\mathbf{k}\\
\operatorname{rot}\tilde{\mathbf{E}} &= \int [\mathrm{i}\mathbf{k}\times\mathbf{E}]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{R}}d\omega d\mathbf{k}\\
\Delta\tilde{\mathbf{E}} &= -\int |\mathbf{k}|^2\mathbf{E}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{R}}d\omega d\mathbf{k}\\
\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E} &= -\int \mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{E})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{R}}d\omega d\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{E}$ — пространственно-временной фурье-образ быстрого поля $\tilde{\mathbf{E}}$.

11. Получите по образцу слайда 18 общее выражение для кубичной части вектора поляризации на слайде 19

12. Получите для Фурье-гармоник ($\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{R})} + c.c.$ и $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}(\mathbf{k}_\Sigma\cdot\mathbf{R})} + c.c.$) связь между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{P}$, следующую из уравнения (слайд 10)

$$\Delta\tilde{\mathbf{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{\mathbf{P}}}{\partial t^2} - 4\pi\operatorname{grad}\operatorname{div}\tilde{\mathbf{E}}$$

Обратите внимание, что волновые вектора гармоник $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_\Sigma$ сознательно выбраны различными.