Лекция 4
Трехчастотное взаимодействие

Система укороченных уравнений

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathcal{E}_1}{dz} + \delta_1\mathcal{E}_1 = \dfrac{2\pi \mathrm{i} k_1}{n_1^2} 2\chi^{(2)}_{123}(-\omega_2,\omega_3)\mathcal{E}_2^*\mathcal{E}_3 \exp\left[\mathrm{i}(k_3-k_2-k_1)z\right] \\ \dfrac{d\mathcal{E}_2}{dz} + \delta_2\mathcal{E}_2 = \dfrac{2\pi \mathrm{i} k_2}{n_2^2} 2\chi^{(2)}_{213}(-\omega_1,\omega_3)\mathcal{E}_1^*\mathcal{E}_3 \exp\left[\mathrm{i}(k_3-k_1-k_2)z\right] \\ \dfrac{d\mathcal{E}_3}{dz} + \delta_3\mathcal{E}_3 = \dfrac{2\pi \mathrm{i} k_3}{n_3^2} 2\chi^{(2)}_{312}(\omega_1,\omega_2)\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 \exp\left[\mathrm{i}(k_1+k_2-k_3)z\right] \end{cases}$$

Соотношения Клейнмана дают $\chi^{(2)}_{123}(-\omega_2,\omega_3) = \chi^{(2)}_{213}(-\omega_1,\omega_3) = \chi^{(2)}_{312}(\omega_1,\omega_2)$

Определим $\gamma_m \equiv \dfrac{4\pi\chi^{(2)}_{\ldots}k_m}{n_m}$ и отметим, что $\gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3 = \omega_1 : \omega_2 : \omega_3$. $\Delta k \equiv k_1 + k_2 - k_3$

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathcal{E}_1}{dz} + \delta_1\mathcal{E}_1 = \mathrm{i}\dfrac{\gamma_1}{n_1}\mathcal{E}_2^*\mathcal{E}_3 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta kz} \\ \dfrac{d\mathcal{E}_2}{dz} + \delta_2\mathcal{E}_2 = \mathrm{i}\dfrac{\gamma_2}{n_2}\mathcal{E}_1^*\mathcal{E}_3 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta kz} \\ \dfrac{d\mathcal{E}_3}{dz} + \delta_3\mathcal{E}_3 = \mathrm{i}\dfrac{\gamma_3}{n_3}\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta kz} \end{cases}$$

Соотношения Мэнли-Роу

пренебрегаем поглощением

$$\begin{cases} \dfrac{d|\mathcal{E}_1|^2}{dz} = \dfrac{2\gamma_1}{n_1}\,\mathrm{Im}\left(\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2\mathcal{E}_3^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta kz}\right) \\ \dfrac{d|\mathcal{E}_2|^2}{dz} = \dfrac{2\gamma_2}{n_2}\,\mathrm{Im}\left(\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2\mathcal{E}_3^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta kz}\right) \\ \dfrac{d|\mathcal{E}_3|^2}{dz} = -\dfrac{2\gamma_3}{n_3}\,\mathrm{Im}\left(\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2\mathcal{E}_3^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta kz}\right) \end{cases}$$

$$\gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3 = \omega_1 : \omega_2 : \omega_3$$

соотношения Мэнли-Роу

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{n_1|\mathcal{E}_1|^2}{\omega_1}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{n_2|\mathcal{E}_2|^2}{\omega_2}\right) = -\frac{d}{dz}\left(\frac{n_3|\mathcal{E}_3|^2}{\omega_3}\right)$$

«закон сохранения числа фотонов»

закон сохранения энергии

$$n_1|\mathcal{E}_1|^2 + n_2|\mathcal{E}_2|^2 + n_3|\mathcal{E}_3|^2 = \mathrm{const}$$

Соотношения Мэнли-Роу справедливы
и для более широкого класса реактивных систем
(фотоны+фононы+поляритоны+...)

энергия перекачивается от $\omega_{1,2}$ в ω_3 или наоборот

Низкочастотная мощная волна

Пусть $|\mathcal{E}_{10}| \gg |\mathcal{E}_{20}|$ и $|\mathcal{E}_{30}|$. Из соотношений Мэнли-Роу получим:

— не можем намного усилить $|\mathcal{E}_3|$, т.к. «закончатся» фотоны на ω_2
— не можем намного усилить $|\mathcal{E}_1|$ и $|\mathcal{E}_2|$, т.к. «закончатся» фотоны на ω_3

Вывод: поле $\mathcal{E}_1$ можно считать заданным! Задача становится линейной.

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathcal{E}_2}{dz} = \mathrm{i}\dfrac{\gamma_2}{n_2}\mathcal{E}_{10}^*\mathcal{E}_3 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta kz} \\ \dfrac{d\mathcal{E}_3}{dz} = \mathrm{i}\dfrac{\gamma_3}{n_3}\mathcal{E}_{10}\mathcal{E}_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta kz} \end{cases} \longrightarrow$$

$$\frac{d^2\mathcal{E}_3}{dz^2} - \mathrm{i}\Delta k\frac{d\mathcal{E}_3}{dz} + \frac{\gamma_2\gamma_3|\mathcal{E}_{10}|^2}{n_2n_3}\mathcal{E}_3 = 0$$

$$\begin{cases} \mathcal{E}_3(z) = (a_3\cos(Qz) + b_3\sin(Qz))\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta kz/2} \\ \mathcal{E}_2(z) = (a_2\cos(Qz) + b_2\sin(Qz))\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta kz/2} \end{cases};$$

где $Q = \sqrt{\dfrac{(\Delta k)^2}{4} + \dfrac{\gamma_2\gamma_3|\mathcal{E}_{10}|^2}{n_2n_3}}$

Амплитуды полей на ω_2, ω_3 колеблются вдоль Oz. Даже при $\Delta k = 0$.

Высокочастотная мощная волна

Пусть $|\mathcal{E}_{30}| \gg |\mathcal{E}_{10}|$ и $|\mathcal{E}_{20}|$. Из соотношений Мэнли-Роу получим:

— $\mathcal{E}_3$ может полностью отдать свою энергию в $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$
— а может забрать себе даже их остатки

Проанализируем, что будет происходить, в приближении заданного $\mathcal{E}_3 \approx \mathcal{E}_{30}$.

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathcal{E}_1}{dz} = \mathrm{i}\dfrac{\gamma_1}{n_1}\mathcal{E}_2^*\mathcal{E}_{30}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta k z} \\ \dfrac{d\mathcal{E}_2}{dz} = \mathrm{i}\dfrac{\gamma_2}{n_2}\mathcal{E}_1^*\mathcal{E}_{30}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta k z} \end{cases} \longrightarrow$$

$$\frac{d^2\mathcal{E}_1}{dz^2} + \mathrm{i}\Delta k\frac{d\mathcal{E}_1}{dz} - \frac{\gamma_1\gamma_2|\mathcal{E}_{30}|^2}{n_1 n_2}\mathcal{E}_1 = 0$$

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1(z) = (a_1\cos(Qz) + b_1\sin(Qz))\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta k z/2} \\ \mathcal{E}_2(z) = (a_2\cos(Qz) + b_2\sin(Qz))\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta k z/2} \end{cases};$$

где $Q = \sqrt{\dfrac{(\Delta k)^2}{4} - \dfrac{\gamma_1\gamma_2|\mathcal{E}_{30}|^2}{n_1 n_2}}$

Амплитуды полей на ω_1, ω_2 колеблются вдоль Oz, если $Q^2 > 0$
Если же $Q^2 < 0$ (например при $\Delta k = 0$), $\sin \to \mathrm{sh}$, $\cos \to \mathrm{ch}$ и амплитуды нарастают!

Параметрический генератор света

коллинеарная геометрия взаимодействия

$$\underbrace{n_1(\omega_1)\omega_1}_{ck_1} + \underbrace{n_2(\omega_2)\omega_2}_{ck_2} = \underbrace{n_3(\omega_3)\omega_3}_{ck_3}$$

• Пусть частота ω_3 фиксирована. Генерируемые частоты ω_{10} и ω_{20} должны давать в сумме ω_3 и удовлетворять условию синхронизма. При наличии зависимости $n(\omega)$ это возможно далеко не для любых частот.

• Показатели преломления подвержены воздействию различных факторов F (температура, внешнее поле...). Оценим сдвиг генерируемых частот при вариации всех трех n и фиксированной ω_3. В этом случае $d\omega_1 = -d\omega_2 \equiv d\Omega$ и

$$d(n_1\omega_1) = c\frac{\partial k_1}{\partial \omega}d\Omega + \omega_{10}\frac{\partial n_1}{\partial F}dF; \quad d(n_2\omega_2) = -c\frac{\partial k_2}{\partial \omega}d\Omega + \omega_{20}\frac{\partial n_2}{\partial F}dF; \quad d(n_3\omega_3) = \omega_3\frac{\partial n_3}{\partial F}dF$$

$$\boxed{d(n_1\omega_1 + n_2\omega_2 - n_3\omega_3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\Omega}{dF} = \frac{\omega_{10}\frac{\partial n_1}{\partial F} + \omega_{20}\frac{\partial n_2}{\partial F} - \omega_3\frac{\partial n_3}{\partial F}}{c\frac{\partial k_2}{\partial \omega} - c\frac{\partial k_1}{\partial \omega}}}$$