Лекция 6
Непараметрические процессы

Линейное поглощение

уравнение для медленно меняющейся амплитуды

$$2\mathrm{i}k_\omega \frac{d\mathcal{E}}{dz} - k_\omega^2 \mathcal{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\omega \mathcal{E} = \ldots$$

• Метод комплексных амплитуд (равно как и точное решение волнового уравнения) предполагает равенство $k_\omega^2 = \omega^2 \varepsilon_\omega / c^2$, даже если ε_ω — комплексная величина. Это значит, что

$$k_\omega = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_\omega} \equiv \frac{\omega}{c}(n_\omega + \mathrm{i}\alpha_\omega), \quad \text{где } n_\omega = \sqrt{\frac{|\varepsilon_\omega| + \operatorname{Re}\varepsilon_\omega}{2}}, \quad \alpha_\omega = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}\varepsilon_\omega)\sqrt{\frac{|\varepsilon_\omega| - \operatorname{Re}\varepsilon_\omega}{2}}$$

При этом «быстрая» амплитуда $\tilde{E}(z)$ в отсутствии нелинейнойсти среды меняется по закону

$$\tilde{E}(z,t) = \mathcal{E}(0)\exp\left(-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}\frac{n_\omega \omega}{c}z - \frac{\omega \alpha_\omega}{c}z\right) + c.c$$

• Как правило, за k_ω все-таки обозначают $n_\omega \omega / c$ — действительное волновое число, где n_ω — **действительный показатель преломления**. Комбинация $\omega\alpha_\omega/c$ — **линейный коэффициент поглощения**; интенсивность волны экспоненциально затухает: $I(z) = I(0)\exp(-2\mathrm{i}\delta_\omega z)$

при слабом поглощении $|\operatorname{Re}\varepsilon_\omega| \gg |\operatorname{Im}\varepsilon_\omega|$

$$n_\omega \approx \sqrt{\operatorname{Re}\varepsilon_\omega} \quad \delta_\omega \approx \frac{\omega \operatorname{Im}\varepsilon_\omega}{2cn_\omega} = \frac{k_\omega \operatorname{Im}\varepsilon_\omega}{2n_\omega^2}$$

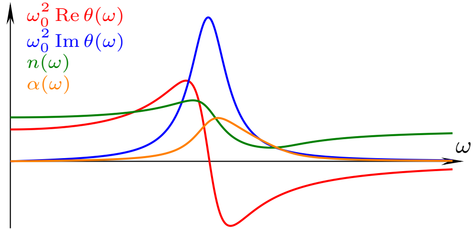
Модель Лоренца

модель гармонического осциллятора
(электрон в атоме колеблется)

$$\ddot{\tilde{\eta}} + \Gamma\dot{\tilde{\eta}} + \omega_0^2\tilde{\eta} = \frac{e\tilde{E}(t)}{m} \equiv \tilde{F}(t)$$

решение для Фурье-образов

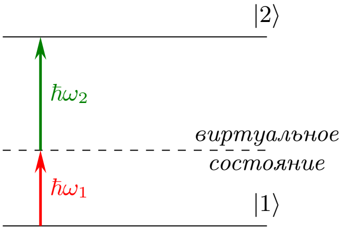
$$\eta(\omega) = \frac{F(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\Gamma\omega} \equiv \theta(\omega)F(\omega)$$



$\theta(\omega)$ — «восприимчивость» атома, а $\chi(\omega) \sim \theta(\omega)$

Если $\omega \to \omega_0$, мнимая часть $\chi(\omega)$ резко растет
поглощение (а также усиление) «закодированы» в мнимой части χ

Двухфотонное поглощение



квантовая диаграмма процесса

$|1\rangle$ и $|2\rangle$ — разрешенные состояния системы

$$W_2 - W_1 = \hbar(\omega_1 + \omega_2)$$

оба фотона поглощаются одновременно
фотоны на СЧ не переизлучаются
синхронизм не нужен (непараметрика)

уравнения для «интенсивностей»

$$I_m = n_m |\mathcal{E}_m|^2$$

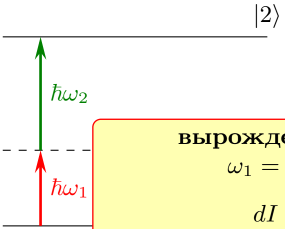
$$\begin{cases} \dfrac{dI_1}{dz} = -\gamma_1 I_1 I_2 \\ \dfrac{dI_2}{dz} = -\gamma_2 I_1 I_2 \end{cases} \quad \text{где } \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

решения для $N_m = I_m/\omega_m$

$$\begin{cases} N_1(z) = (N_{20} - N_{10}) \left(\dfrac{N_{20}}{N_{10}} \exp(Kz) - 1 \right)^{-1} \\ N_2(z) = (N_{20} - N_{10}) \left(1 - \dfrac{N_{10}}{N_{20}} \exp(-Kz) \right)^{-1} \end{cases}$$

где $K = \gamma_2 \omega_1 (N_{20} - N_{10}) = \gamma_1 \omega_2 (N_{20} - N_{10})$

Двухфотонное поглощение



уравнения для «интенсивностей»

$$I_m = n_m|\mathcal{E}_m|^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{dI_1}{d\ldots} = -\gamma_1 I_1 I_2 \end{cases}$$

…е $\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2} = \dfrac{\omega_1}{\omega_2}$

вырожденное двухфотонное поглощение

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega; \;\; I_1 = I_2 = I; \;\; \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$$

$$\frac{dI}{dz} = -\gamma I^2 \quad \Rightarrow \quad I(z) = \frac{I_0}{1 + \gamma I_0 z}$$

убывает медленнее, чем в линейном случае

$I(z)$ не зависит от начальной I_0 при $\gamma I_0 z \gg 1$

похожее решение в невырожденном случае будет при $N_{10} = N_{20}$

квантов…

$|1\rangle$ и $|2\rangle$ — раз…

W_2

оба фотона поглощаются одновременно

фотоны на СЧ не переизлучаются

синхронизм не нужен (непараметрика)

…I_m/ω_m

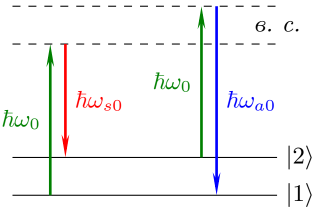
…p$(Kz) - 1\Big)^{-1}$

$$N_2(z) = (N_{20} - N_{10})\left(1 - \frac{N_{10}}{N_{20}}\exp(-Kz)\right)^{-1}$$

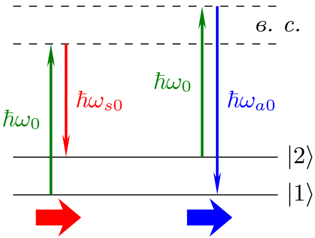
где $K = \gamma_2\omega_1(N_{20} - N_{10}) = \gamma_1\omega_2(N_{20} - N_{10})$

Комбинационное рассеяние

спонтанное



вынужденное



$|1\rangle$ и $|2\rangle$ — близкие уровни системы
$W_2 - W_1 = \hbar\Omega$

фотон на частоте ω_0 неупруго взаимодействует с этим переходом, генерируя фотон на частоте $\omega_{s0} = \omega_0 - \Omega$ или на частоте $\omega_{a0} = \omega_0 + \Omega$

генерируемое излучение некогерентно

то же самое, но процессы происходят под воздействием **уже присутствующих** фотонов на частотах ω_{s0} и ω_{a0}

«скорость» рассеяния пропорциональна интенсивности вынуждающей (s или a) волны

генерируемое излучение когерентно

s — **с**токсова частота, a — **а**нтистоксова частота
типичный порядок сдвига $\Omega \sim 1 - 50$ТГц

ВКР (or SRS*)

в среде распространяются две волны: ω_0 и ω_s

$$\tilde{E}(z,t) = \mathcal{E}_0(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t + \mathrm{i}k_0 z} + \mathcal{E}_s(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_s t + \mathrm{i}k_s z} + c.c.$$

- Пусть поляризуемость молекулы слабо, но зависит от «ядерной координаты» $\tilde{q}$:

  $\tilde{\alpha} = \alpha_0 + \kappa\tilde{q}$ В свою очередь, дипольный момент $\tilde{p} = \alpha\tilde{E} = \alpha_0\tilde{E} + \kappa\tilde{q}\tilde{E}$

- Энергия поля $\sim \tilde{E}^2$ и осциллирует на комбинационных частотах. В том числе на низкой частоте $\Delta\omega = \omega_0 - \omega_s$:

  $$W(t) \sim \tilde{E}^2(t) = \mathcal{E}_0\mathcal{E}_s^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta\omega t} + c.c. + \ldots$$

- Эта низкая частота способна «раскачать» ядерную координату $\tilde{q}$:

  $$\ddot{\tilde{q}} + \Gamma_q\dot{\tilde{q}} + \Omega^2\tilde{q} = \tilde{F}_q(t), \text{ где } \tilde{F}_q = -\frac{\partial(-\tilde{p}\tilde{E})}{\partial\tilde{q}} = \kappa\tilde{E}^2 \quad \Rightarrow \quad q(\Delta\omega) = \frac{\kappa\mathcal{E}_0\mathcal{E}_s^*}{\Omega^2 - (\Delta\omega)^2 - \mathrm{i}\Gamma_q\Delta\omega}$$

при $\Delta\omega \approx \Omega$ получаем резонанс молекулярных колебаний

вектор поляризации среды при этом приобретает нелинейную добавку

$$\tilde{P}(t) \sim \tilde{\alpha}\tilde{E} = \underbrace{\alpha_0\tilde{E}}_{\tilde{P}^{\mathrm{L}}} + \underbrace{\kappa\tilde{q}\tilde{E}}_{\tilde{P}^{\mathrm{NL}}}$$

*Stimulated Raman Scattering

Полуклассические уравнения ВКР

распишем подробно нелинейную часть поляризации

$$\tilde{P}^{\mathrm{NL}}(t) \sim \kappa \left(q(\Delta\omega) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta\omega t} + q^*(\Delta\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\omega t} \right) \left(\mathcal{E}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} + \mathcal{E}_0^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} + \mathcal{E}_s \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_s t} + \mathcal{E}_s^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_s t} \right)$$

- В спектре $\tilde{P}^{\mathrm{NL}}(t)$ есть, помимо всего прочего, частота ω_s:

$$\mathcal{P}^{\mathrm{NL}}(\omega_s) \sim \mathcal{E}_0 q^* \sim \frac{\kappa^2 |\mathcal{E}_0|^2 \mathcal{E}_s}{\Omega^2 - (\Delta\omega)^2 + \mathrm{i}\Gamma_q \Delta\omega} \equiv \chi_R^{(3)} |\mathcal{E}_0|^2 \mathcal{E}_s,$$ знак сменился из-за сопряжения!

Мнимая часть восприимчивости отрицательна!

- Запишем укороченное уравнение для $\mathcal{E}_s$ в приближении заданного поля:

$$\frac{d\mathcal{E}_s}{dz} + \delta_s \mathcal{E}_s = \frac{2\mathrm{i}\pi k_s}{n_s^2} \chi_R^{(3)} |\mathcal{E}_0|^2 \mathcal{E}_s \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}_s}{dz} + \left(\delta_s + \frac{2\pi k_s |\mathcal{E}_0|^2 \,\mathrm{Im}\, \chi_R^{(3)}}{n_s^2} \right) \mathcal{E}_s = \frac{2\mathrm{i}\pi k_s}{n_s^2} \,\mathrm{Re}\, \chi_R^{(3)} |\mathcal{E}_0|^2 \mathcal{E}_s$$

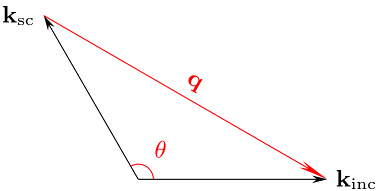
стоксова волна усиливается, если $\dfrac{2\pi k_s |\mathcal{E}_0|^2}{n_s^2} \left| \mathrm{Im}\, \chi_R^{(3)} \right| > \delta_s$

ВКР — кубично-нелинейный процесс $\omega_0 - \omega_0 + \omega_s = \omega_s$

ВРМБ (or SBS*)

длина акустической волны ограничена снизу межмолекулярным расстоянием
скорость звука в средах гораздо меньше скорости света
максимально возможная акустическая частота $\sim$ 1ГГц

• Сдвиг частоты в РМБ **очень** мал в сравнении с оптическими частотами. Падающая и рассеянная волны имеют практичеки одинаковые волновые числа $k_{\rm inc} \approx k_{\rm sc} = \omega_0 n_\omega / c$.



$$\mathbf{k}_{\rm sc} = \mathbf{k}_{\rm inc} - \mathbf{q}$$

$$|\mathbf{q}| \approx 2k_{\rm inc} \sin(\theta/2)$$

$$\Omega = v_{\text{зв}} |\mathbf{q}| = 2\frac{v_{\text{зв}}}{c/n_\omega}\omega_0 \sin(\theta/2) \ll \omega_0$$

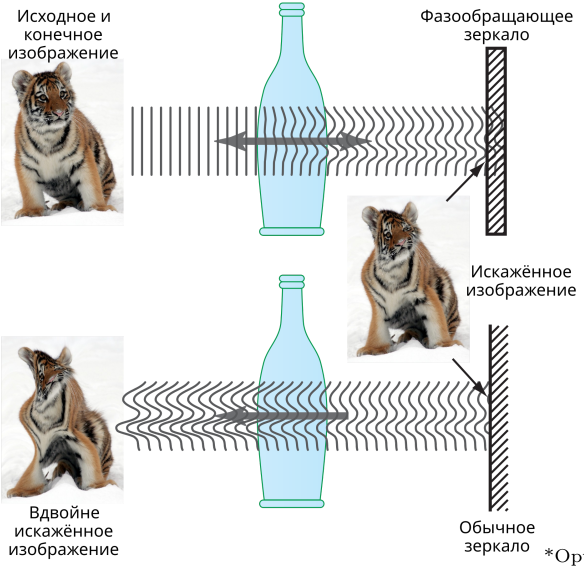
• Длина звуковой волны может быть даже меньше световой. Но все равно частота звуковой волны значительно меньше оптической из-за разности скоростей звука и света.

• Максимальный сдвиг частоты $\Omega_{\max} = 2n_\omega v_{\text{зв}}/c \cdot \omega_0$ наблюдается при рассеянии назад.

рассеяние назад при ВРМБ используется
для особого рода зеркал, сопрягающих фазу

*Stimulated Brilloin Scattering

Обращение волнового фронта (or OPC*)



*Optical Phase Conjugation