Лекция 7
Кубично-нелинейное самовоздействие

Учет дифракции и дисперсии

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\tilde{\mathbf{E}} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{D}}^{\mathrm{L}}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{P}}^{\mathrm{NL}}}{\partial t^2}, \text{ где } \tilde{\mathbf{E}} = \boldsymbol{\mathcal{E}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}k_\omega z} + c.c.$$

Дифракция: учтем, что $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ зависит не только от z, но и от x, y:

$$\Delta[\boldsymbol{\mathcal{E}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\omega z}] \approx \left(2\mathrm{i}k_\omega \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial y^2} - k_\omega^2 \boldsymbol{\mathcal{E}}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\omega z} \equiv \left(2\mathrm{i}k_\omega \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial z} + \Delta_\perp \boldsymbol{\mathcal{E}} - k_\omega^2 \boldsymbol{\mathcal{E}}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\omega z}$$

Дисперсия: учтем, что $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ зависит от t, тогда вид $\tilde{\mathbf{D}}^{\mathrm{L}}$ усложнится:

$$\tilde{\mathbf{D}}^{\mathrm{L}}(\mathbf{R}, t) \approx \left(\varepsilon_\omega \boldsymbol{\mathcal{E}} + \mathrm{i}\varepsilon'_\omega \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t} - \frac{\varepsilon''_\omega}{2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t^2}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}k_\omega z} + c.c., \text{ учтем равенство } k_\omega^2 = \omega^2 \operatorname{Re}\varepsilon_\omega / c^2$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{D}}^{\mathrm{L}}}{\partial t^2} \approx \left(-k_\omega^2\left(1 + \frac{\mathrm{i}\operatorname{Im}\varepsilon_\omega}{n_\omega^2}\right)\boldsymbol{\mathcal{E}} - 2\mathrm{i}k_\omega k'_\omega \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t} + k_\omega k''_\omega \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t^2}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}k_\omega z} + c.c.$$

модифицированное укороченное уравнение

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial z} + k'_\omega \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t} + \frac{\mathrm{i}k''_\omega}{2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t^2} - \frac{\mathrm{i}}{2k_\omega}\Delta_\perp \boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{k_\omega \operatorname{Im}\varepsilon_\omega}{2n_\omega^2}\boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{2\pi\mathrm{i}k_\omega}{n_\omega^2}\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\mathrm{NL}} \exp\left[\mathrm{i}(k_\Sigma - k_\omega)z\right]$$

Бегущее время

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial z} + k'\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t} + \frac{\mathrm{i}k''}{2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t^2} - \frac{\mathrm{i}}{2k}\Delta_\perp \boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{2\pi \mathrm{i}k}{n^2}\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\mathrm{NL}}}$$

- Введем время, запаздывающее вдоль Oz: $t_1 = t - k'z$; координату $z = z_1$ не меняем

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t_1}\frac{\partial t_1}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z_1} - k'\frac{\partial}{\partial t_1}; \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_1}$$

- В новых переменных $\dfrac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial z} + k'\dfrac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t} = \dfrac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial z_1}$

- Если нет дифракции, дисперсии 2-го порядка и нелинейности, то $\dfrac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial z_1} = 0$

В исходных переменных $\boldsymbol{\mathcal{E}}(t - k'z, z) \equiv \boldsymbol{\mathcal{E}}\left(t - \dfrac{z}{v_g}, z\right) = \boldsymbol{\mathcal{E}}(t, 0)$, где $v_g = \dfrac{\partial \omega}{\partial k}$

В системе координат, движущейся со скоростью v_g (групповой скоростью), импульс не искажается!

$t_1 = t - z/v_g$ — **бегущее время**

все уравнения по умолчанию далее пишем в нем

Нелинейная поляризация

$$\boxed{\underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\mathrm{i}k''}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\mathrm{i}}{2k}\Delta_\perp\right]}_{\equiv\hat{L}}\boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{2\pi\mathrm{i}k}{n^2}\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\mathrm{NL}}}$$

В изотропной среде $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\mathrm{NL}} = 2\chi_1|\boldsymbol{\mathcal{E}}|^2\boldsymbol{\mathcal{E}} + \chi_2(\boldsymbol{\mathcal{E}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}})\boldsymbol{\mathcal{E}}^*$ (высчитывается из $\mathcal{P}_i = \chi^{(3)}_{ijml}\mathcal{E}_j\mathcal{E}_m\mathcal{E}^*_l$)

Разложим $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \mathbf{e}_R\mathcal{E}_R + \mathbf{e}_L\mathcal{E}_L \equiv \dfrac{\mathbf{e}_x + \mathrm{i}\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}}\dfrac{\mathcal{E}_x - \mathrm{i}\mathcal{E}_y}{\sqrt{2}} + \dfrac{\mathbf{e}_x - \mathrm{i}\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}}\dfrac{\mathcal{E}_x + \mathrm{i}\mathcal{E}_y}{\sqrt{2}}$

в базисе $\mathbf{e}_{R,L}$ уравнения имеют симметричную форму

$$\begin{cases}\hat{L}\mathcal{E}_R = \mathrm{i}\mathcal{N}\left(|\mathcal{E}_R|^2 + (1+\psi)|\mathcal{E}_L|^2\right)\mathcal{E}_R\\ \hat{L}\mathcal{E}_L = \mathrm{i}\mathcal{N}\left(|\mathcal{E}_L|^2 + (1+\psi)|\mathcal{E}_R|^2\right)\mathcal{E}_L\end{cases}$$

где $\psi = \dfrac{\chi_2}{\chi_1}$, $\mathcal{N} = \dfrac{4\pi k\chi_1}{n^2}$

круговая поляризация

$$\mathcal{E}_L = 0$$

$$\hat{L}\mathcal{E}_R = \mathrm{i}\mathcal{N}|\mathcal{E}_R|^2\mathcal{E}_R$$

линейная поляризация

$$\mathcal{E}_R = \mathcal{E}_L = \mathcal{E}$$

$$\hat{L}\mathcal{E} = \mathrm{i}\mathcal{N}(2+\psi)|\mathcal{E}|^2\mathcal{E}$$

Нелинейное распространение импульсов

пренебрегаем дифракцией, скалярный случай

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \frac{\mathrm{i}k''}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = \mathrm{i}\mathcal{N}|\mathcal{E}|^2\mathcal{E}$$

- Одно из решений линейного уравнения — гауссов импульс:

$$\mathcal{E}(t,z) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{\beta(z)}}\exp\left(-\frac{t^2}{t_0^2\beta(z)}\right), \text{ где } \beta(z) = 1 - \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(k'')z}{l_{ds}} \text{ и } l_{ds} = \frac{t_0^2}{2|k''|}$$

- Импульс «расплывается» при любом знаке k'',
  при $k'' > 0$ передний фронт «краснеет», а задний «синеет»

нормируем $\zeta = z/l_{ds}$, $u = \mathcal{E}/|\mathcal{E}_0|$, $\tau = t/t_0$

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \mathrm{sgn}(k'')\frac{\mathrm{i}}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \mathrm{i}P|u|^2 u \qquad \text{где } P = \mathcal{N}l_{ds}|\mathcal{E}_0|^2$$

при $k'' > 0$ нелинейность «помогает» дисперсии

при $k'' < 0$ нелинейность «противодействует» дисперсии,
и при $P > P_{\text{пор}}$ импульс «схлопывается»

Нелинейное распространение импульсов

пренебрегаем дифракцией, скалярный случай

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \frac{\mathrm{i}k''}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = \mathrm{i}\mathcal{N}|\mathcal{E}|^2\mathcal{E}$$

- Одно из решени

$\mathcal{E}(t, z) = -$

- Импульс «распл
  при $k'' > 0$

солитонное решение

возможно только при $k'' < 0$

$$u(\tau, \zeta) = \frac{\exp(\mathrm{i}P\zeta/2)}{\cosh(\sqrt{2P}\tau)}$$

импульс бежит не изменяя формы (но фаза набегает)
такой солитон устойчив относительно возмущений

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \mathrm{sgn}(k'')\frac{\mathrm{i}}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \mathrm{i}P|u|^2 u \qquad \text{где } P = \mathcal{N} l_{ds}|\mathcal{E}_0|^2$$

при $k'' > 0$ нелинейность «помогает» дисперсии

при $k'' < 0$ нелинейность «противодействует» дисперсии,
и при $P > P_{\text{пор}}$ импульс «схлопывается»

Нелинейная дифракция пучков

пренебрегаем дисперсией, скалярный случай

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} - \frac{\mathrm{i}}{2k}\Delta_\perp \mathcal{E} = \mathrm{i}\mathcal{N}|\mathcal{E}|^2\mathcal{E}$$

- Одно из решений линейного уравнения — гауссов пучок:

$$\mathcal{E}(r,z) = \frac{\mathcal{E}_0}{\beta(z)}\exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2\beta(z)}\right), \text{ где } \beta(z) = 1 + \frac{\mathrm{i}z}{l_d} \text{ и } l_d = \frac{kw_0^2}{2}$$

- Пучок всегда «расплывается» по поперечному сечению

нормируем $\zeta = z/l_d$, $u = \mathcal{E}/|\mathcal{E}_0|$, $(x_1, y_1) = (x, y)/w_0$

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} - \frac{\mathrm{i}}{4}\Delta_\perp u = \mathrm{i}P|u|^2 u \qquad \text{где } P = \mathcal{N} l_d |\mathcal{E}_0|^2$$

нелинейность всегда препятствует дифракционному расплыванию

при $P \geq P_{\text{пор}}$ нелинейность «побеждает» дифракцию

солитонные решения есть, ищутся только численно, неустойчивы

Безаберрационное приближение

на примере дифракции, с дисперсией всё аналогично

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\mathrm{i}}{4}\Delta_\perp u = \mathrm{i}P|u|^2 u$$

Для изначально гауссового пучка, предположим что он останется гауссовым, но «параметры расплывания» имеют неизвестную зависимость от z:

$$u(r,z) = \frac{1}{a(z)}\exp\left(-\frac{r^2}{b(z)}\right), \text{ причем } \operatorname{Im}\frac{1}{b} = \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\ln\operatorname{Re}\frac{1}{b} \text{ и } |a|^2\operatorname{Re}\frac{1}{b} = \mathrm{const}$$

- Приосевое приближение:

  подставить, exp(...) в правой части разложить в ряд Тейлора, приравнять коэффициенты

- Метод моментов:

  подставить не в само уравнение, а в его специальные интегральные следствия

приосевое приближение лучше оценивает расстояние до коллапса
метод моментов точнее определяет пороговую мощность