

Лекция 6
Введение в статфизику

Статистическая физика

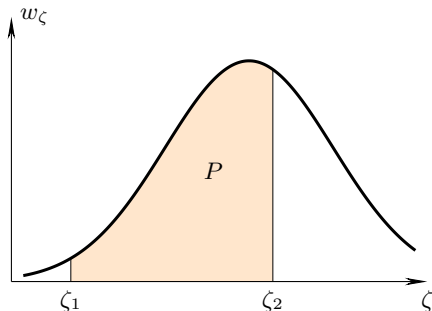
раздел физики, посвященный описанию и предсказанию свойств макроскопических систем с **большим числом частиц**

рассматривает микроскопические параметры частиц системы, полагая их **случайными величинами**

является наукой **теоретической**
восходит от абстрактного к конкретному

Случайные величины для физиков

«случайность» величины ζ мы будем понимать интуитивно



$$P(\zeta \in [\zeta_1; \zeta_2]) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} w(\zeta) d\zeta$$

- Случайная величина принимает разные значения от измерения к измерению
- $w(\zeta)$ или w_ζ — ф-ция плотности вероятности (PDF). Помимо нахождения вероятностей, ее еще используют для определения средних значений (матожиданий):

$$E[f(\zeta)] \equiv \langle f(\zeta) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) w_\zeta d\zeta$$

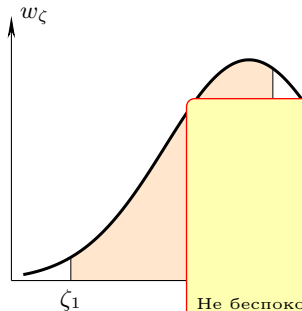
- Два важных частных случая:

$$\text{среднее: } \langle \zeta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta w_\zeta d\zeta$$

$$\text{дисперсия: } \sigma_\zeta^2 = \langle (\zeta - \langle \zeta \rangle)^2 \rangle = \langle \zeta^2 \rangle - \langle \zeta \rangle^2 > 0$$

Случайные величины для физиков

«случайность» величины ζ мы будем понимать интуитивно



- Случайная величина принимает разные значения от измерения к измерению

- $w_\zeta(\zeta)$ или w_ζ — функция плотности вероятности (PDF).
еще используют (математических ожиданий):

и не забудь про нормировку!

$$\langle 1 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} w_\zeta d\zeta = 1$$

Не беспокойся, куда-нибудь ты обязательно попадешь, — сказал Кот

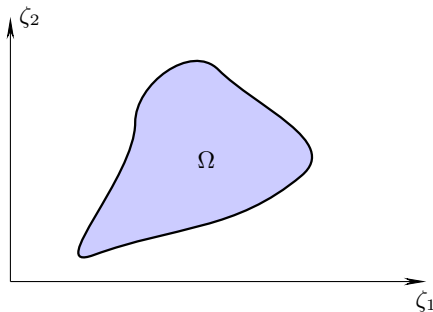
$$P(\zeta \in [\zeta_1; \zeta_2]) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} w(\zeta) d\zeta$$

среднее: $\langle \zeta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta w_\zeta d\zeta$

дисперсия: $\sigma_\zeta^2 = \langle (\zeta - \langle \zeta \rangle)^2 \rangle = \langle \zeta^2 \rangle - \langle \zeta \rangle^2 > 0$

Случайные величины для физиков

с наборами случайных величин $X = (\zeta_1, \dots, \zeta_N)$ мы работаем аналогично



$$P(X \in \Omega) = \int_{\Omega} w(X) dX$$

не «объем» Ω !!!

- $w(X)$ или w_X — многомерная PDF
- Можно исключить из рассмотрения одну из величин. Для этого $w(X)$ надо проинтергрировать по ней:

$$w(\zeta_1, \zeta_2) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) d\zeta_3$$

маргинальная плотность

- Средние считаются аналогично:

$$\langle f(X) \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(X) w_X dX$$

- Вместо дисперсий — ковариационная матрица:

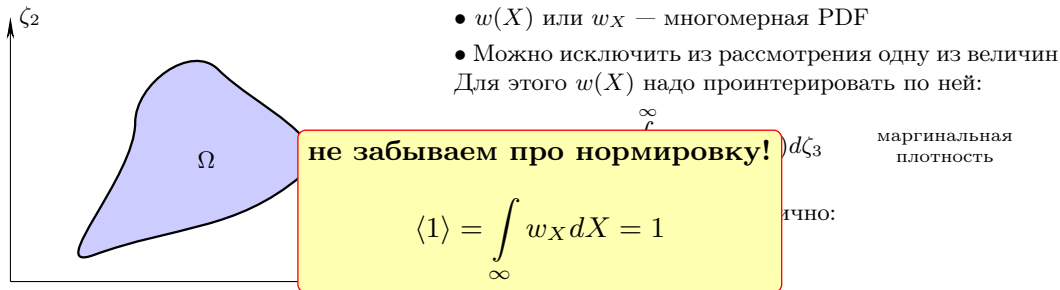
$$K_{ij} = K_{ji} = \langle \zeta_i \zeta_j \rangle - \langle \zeta_i \rangle \langle \zeta_j \rangle$$

- Если величины из X статистически независимы, то K_{ij} — диагональная матрица, а $w(X)$ факторизуется:

$$w_X = \prod_{i=1}^N w(\zeta_i)$$

Случайные величины для физиков

с наборами случайных величин $X = (\zeta_1, \dots, \zeta_N)$ мы работаем аналогично



$$P(X \in \Omega) = \int_{\Omega} w(X) dX$$

не «объем» Ω !!!

• Вместо дисперсий — ковариационная матрица:

$$K_{ij} = K_{ji} = \langle \zeta_i \zeta_j \rangle - \langle \zeta_i \rangle \langle \zeta_j \rangle$$

• Если величины из X статистически независимы, то K_{ij} — диагональная матрица, а $w(X)$ факторизуется:

$$w_X = \prod_{i=1}^N w(\zeta_i)$$

Примеры случайных физических величин

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА (1860)

Проекции скорости частицы, взятые в разные моменты времени
или у случайно выбранной частицы

$$w(v_x, v_y, v_z) = \frac{1}{Z_K} \exp \left(-\frac{m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT} \right)$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬЦМАНА (1870)

Координаты частицы, взятые в разные моменты времени
или у случайно выбранной частицы

$$w(x, y, z) = \frac{1}{Z_\Pi} \exp \left(-\frac{\Pi(x, y, z)}{kT} \right), \text{ где } \Pi(x, y, z) \text{ — потенциальная энергия}$$

КАНОНИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГИББСА (1902)

Набор всех обобщенных координат и импульсов $X = (\mathbf{q}..., \mathbf{p}...)$ всех частиц в куске вещества

$$w(X) = \frac{1}{Z} \exp \left(-\frac{\mathcal{H}(X)}{kT} \right), \text{ где } \mathcal{H}(X) \text{ — гамильтониан (что??)}$$

Распределение Максвелла

технически, это тройной Гаусс

$$w(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}\right)$$

- Все компоненты скорости распределены одинаково и независимо:

$$w(\mathbf{v}) = w(v_x)w(v_y)w(v_z)$$

$$w(v_i) = \mathcal{N}(0, \sigma^2), \text{ где } \sigma^2 = kT/m. \text{ В частности } \langle v_i^2 \rangle = kT/m$$

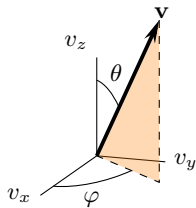
- Очень просится переход от декартовых проекций к «модуль-направлению»:

$$\mathbf{v} = v(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

Вероятность неизменна: $w(v_x, v_y, v_z)|dv_x dv_y dv_z| = w(v, \theta, \varphi)|dv d\theta d\varphi|$, поэтому

$$w(v, \theta, \varphi) = w(v_x, v_y, v_z) \left| \frac{\partial(v_x, v_y, v_z)}{\partial(v, \theta, \varphi)} \right| = \frac{v^2 \sin \theta}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right)$$

Проинтегрируем по углам: $w(v) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} w_{v\theta\varphi} d\theta d\varphi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{v^2}{\sigma^3} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right)$



Распределение Максвелла

технически, это тройной Гаусс

$$w(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT} \right)$$

- Все компоненты $w(\mathbf{v}) =$

$$w(v_i)$$

$$w(v_i)$$

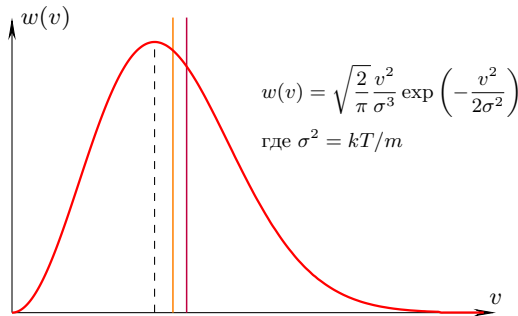
- Очень просится п

$$\mathbf{v} = v(\mathbf{e}_r)$$

Вероятность неизм

$$w(v, \theta, \varphi)$$

Проинтегрируем по



$$v_{\max} = \sigma\sqrt{2}$$

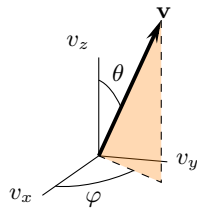
$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma$$

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sigma\sqrt{3}$$

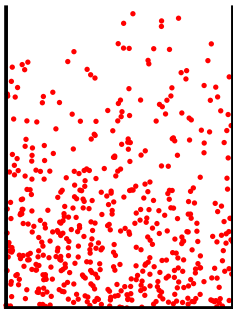
ию»:

ому

$$\left(\frac{v^2}{2} \right)$$



Простейшее распределение Больцмана



$$w(z) = \frac{1}{z_0} \exp\left(-\frac{z}{z_0}\right)$$

Рассмотрим газ в прямом стакане «без крышки».

Потенциальная энергия молекулы газа в поле тяжести $\Pi(z) = mgz$.

Соответственно, распределение для координат (x, y, z) имеет вид

$$w(x, y, z) = \frac{1}{Z_{\Pi}} \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) \equiv \frac{1}{Z_{\Pi}} \exp\left(-\frac{z}{z_0}\right), \text{ где } z_0 = \frac{kT}{mg}$$

Координаты x и y распределены равномерно, интеграл по ним дает умножение на площадь стакана S :

$$w(z) = \frac{S}{Z_{\Pi}} \exp\left(-\frac{z}{z_0}\right), \text{ причем } 1 = \int_0^{\infty} w(z) dz = \frac{z_0 S}{Z_{\Pi}}$$

Среднее значение: $\langle z \rangle = z_0$, **дисперсия:** $\sigma_z^2 = z_0^2$.

Если в сосуде всего N частиц, то в маленьком объеме ΔV находится $\Delta N = Nw(x, y, z)\Delta V$.

Следовательно, локальная концентрация $n(x, y, z) = \frac{\Delta N}{\Delta V} = Nw(x, y, z)$.

Концентрация экспоненциально убывает с высотой, если считать $T = \text{const}$.

При этом $p \sim n$ и также экспоненциально убывает с высотой (барометрическая формула).