



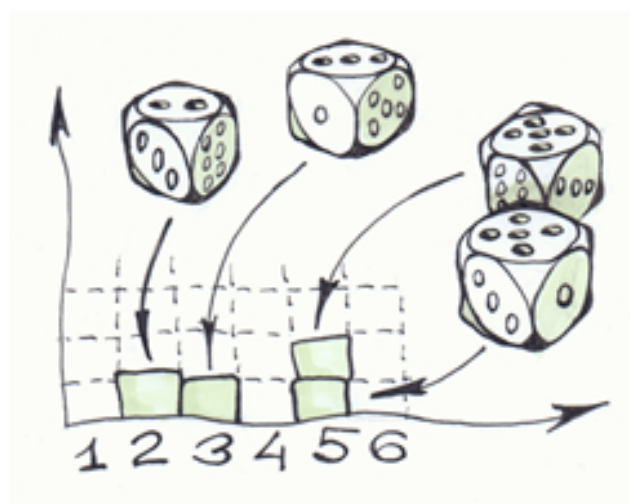
Московский государственный
университет им. м.в. ломоносова
физический факультет

Вероятностные распределения физических величин

сборник задач

О. А. Чичигина

Учебно-методическое пособие



Москва 2026

О. А. Чичигина

Вероятностные распределения физических величин

сборник задач

Учебно-методическое пособие. Физический факультет Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова. 2026 г., 80 стр.

Целью данного пособия является научить студентов описывать физические явления на языке вероятностных распределений. Для этого используются задачи на подбор соответствующих распределений к физическим величинам, задания для выявления физического смысла различных статистических характеристик. Отдельно рассматриваются задачи перехода от одних распределений к другим, соответствующего преобразованиям физических параметров или переходам в пространство другой размерности. В задачнике приводится много задач, связанных с вероятностной интерпретацией результатов эксперимента, представленных в виде случайных траекторий, структур из точек, наборов числовых значений и графиков. Автор выражает глубокую благодарность В.М. Петниковой, А.В. Карговскому, М.А. Рожда, О.С. Кайгородцевой и А.Н. Оленину и Д.С. Урюпиной за помощь в работе над пособием.

Рекомендовано учебно-методической комиссией МГУ им. М.В. Ломоносова для специалистов по специальности физика.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Ведущий научный сотрудник, доктор физ.-мат. наук В.В. Стрелков
Старший научный сотрудник, кандидат физ.-мат. наук Д.А. Сидоров-Бирюков

Подписано к печати _____
Объем _____ п.л. Тираж _____ экз. Заказ № _____
Отпечатано в Отделе оперативной печати физического факультета
МГУ

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова. 2026

Содержание

- 1 Задачи повышенной легкости — 4
- 2 Дискретные случайные величины — 11
- 3 Переходы между дискретными и непрерывными случайными величинами — 25
- 4 Базовые распределения вероятностей в физике — 35
- 5 Распределение суммы случайных величин — 56
- 6 Экзотические распределения физических величин — 61
- 7 Решения уравнения Фоккера-Планка — 69
- 8 Список терминов — 74
- 9 Источники — 77
- 10 Литература — 79

1 Задачи повышенной легкости

Просвещение внедрять с умеренностью,
по возможности избегая кровопролития.

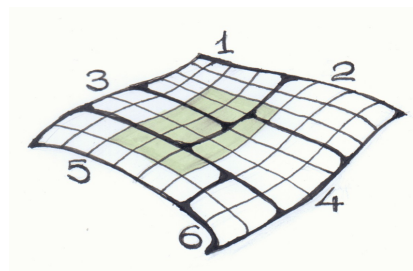
Салтыков-Щедрин

1.1 Замена физике

Предложите, на основе какой области знаний можно было бы преподавать и наглядно объяснять теорию вероятностей и математическую статистику, если бы нельзя было использовать физику (логистика, энтомология, лингвистика, социология, генетика, динамика популяций, эпидемиология)

1.2 Рандомные классики

Постройте гистограмму для вероятности попадания хаотически движущейся частицы в область с данным номером на рисунке и условную гистограмму, при условии, что она в заштрихованной области.

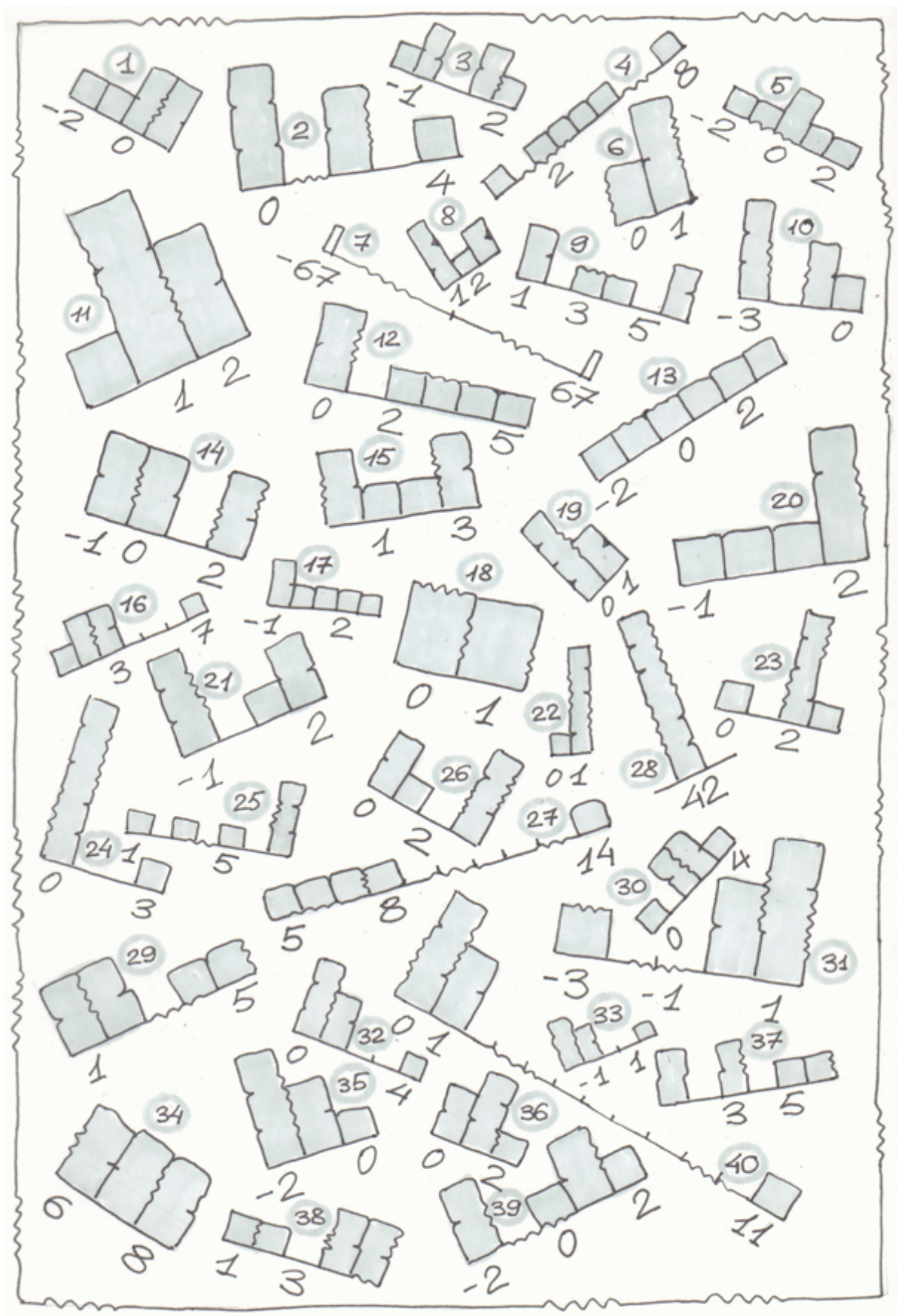


1.3 Гистограмма кубика

Постройте экспериментальную гистограмму для одной из игральных костей (кубика), насколько успеете. Для этого нужно наращивать ступеньки при выпадении соответствующего значения. Можно ли по получившемуся результату предсказать равномерное распределение?

1.4 Энтропия Бернулли

Докажите, что энтропия распределения Бернулли $S = p \ln p + (1 - p) \ln(1 - p)$ и что она максимальна при $p = 1/2$.



1.5 Гистограммы из кубика

Я впустил в свои сны вороненый зрачок конвоя,
жрал хлеб изгнания, не оставляя корок.
Позволял своим связкам все звуки, помимо воя;
перешел на шепот. Теперь мне сорок.

И. Бродский

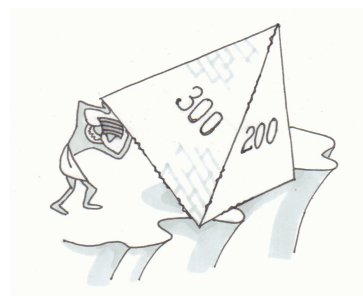
Из 40 представленных на рисунке гистограмм, описывающих дискретные случайные величины, только одну нельзя смоделировать с помощью кубика, на гранях которого пишутся необходимые числа. Найдите эту гистограмму. Также найдите следующие гистограммы

- | | |
|---------------------------|---|
| 1) Нулевое среднее | 10) С самым длинным хвостом |
| 2) Нулевая дисперсия | |
| 3) Нулевая энтропия | 11) Можно получить из обычного кубика, если стереть некоторые точки |
| 4) Максимальное среднее | |
| 5) Максимальная дисперсия | 12) Если стереть 2 точки |
| 6) Максимальная энтропия | 13) Если одну стереть, одну добавить |
| 7) Бернулли | |
| 8) Равномерное | 14) Ваш вариант свойства распределения |
| 9) Симметричное | |

1.6 Тетраэдр

Найдите математическое ожидание, дисперсию и энтропию для случайной величины, полученной с помощью тетраэдра, на гранях которого написаны числа $\{-3, -2, 2, 3\}$.

Что изменится, если там написать $\{-300, -200, 200, 300\}$?



1.7 Десятигранные кости

Найдите распределение вероятностей для суммы на двух десятигранных костях

(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) и (00, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90). Постройте приблизительно гистограмму. Проверьте нормировку.

1.8 Энтропия равномерного

Докажите, что энтропия равномерного распределения дискретной случайной величины, принимающей n любых неповторяющихся значений, описывается формулой $S = \ln n$

1.9 Имануил Кант

Определите, относительно следующего высказывания И.Канта в Критике чистого разума *Случайным в чисто категориальном смысле мы называем то, противоречащая противоположность чего возможна*, относится ли оно к любому распределению или только к распределению Бернулли?

1.10 Бернулли для газа

-- Ты не знаешь! -- подхватил Синяя Борода. -- Ну, так я знаю! Ты хотела войти в каморку.

Шарль Перо

Рассмотрим модель двумерного движения N молекул идеального газа в сосуде длиной a и шириной b . Частицы могут влетать в выделенный объем $V \ll ab$ через отверстие в перегородке длиной c . Постройте распределение вероятностей для какой-нибудь из следующих флуктуирующих величин

- 1) Величина, равная 1, если одна выделенная частица находится в данный момент в выделенном малом объеме V , и равная 0, если она вне его
- 2) Величина, равная 1, если последнее столкновение частицы со стенкой было именно с левой стенкой (длиной a), и равная 0, если с другой стенкой
- 3) Число частиц, оказавшихся в данный момент в выделенном малом объеме V , если $N = 1$.
- 4) Величина, равная 1, если горизонтальная проекция скорости выделенной частицы больше вертикальной, и равная 0, если наоборот
- 5) Величина, равная 1, если выделенная частица участвовала в последнем столкновении шариков друг с другом, если $N = 3$, и равная 0, если нет
- 6) Величина, равная 1, если число шариков, оказавшихся в данный момент в выделенном малом объеме V , равно 200, и равная 0, если нет. Число частиц $N = 400$.

1.11 Диалог частиц в объеме с закутком

Напишите небольшой диалог между двумя частицами, движущимися в некотором объеме и попадающими время от времени в небольшой выделенный объем, или монолог одной из них. Отрадите в нем статистические закономерности процессов.

1.12 Две частицы в закутке

Найдите распределение числа частиц в выделенном объеме, если вероятность попасть туда для одной частицы 0.1, а всего их 2, с помощью простого перебора возможных вариантов, а потом с помощью биномиального распределения. Постройте гистограмму. Проверьте нормировку.

1.13 Гистограмма двух монеток

Карандышев: Уж вы слишком невзыскательны. Кнуров и Вожеватов мечут жеребий, кому вы достанетесь, играют в орлянку -- и это не оскорбление?

А. Островский

Постройте экспериментальную гистограмму числа выпадений орла при бросании двух монеток. Прав ли был Даламбер, считая, что вероятность выпадения двух орлов равна $1/3$?

1.14 Гистограмма трех монеток

Постройте экспериментальную гистограмму числа выпадений орла при бросании трех монеток.

1.15 Интуитивная вероятность

Найдите соответствия для групп разговорных характеристик вероятности события (1-5) и математического выражения: А. $P \rightarrow 0$, В. $P < 1/2$, С. $P \approx 1/2$, D. $P > 1/2$, Е $P \rightarrow 1$. Вычеркните или перенесите в другую группу те выражения, которые, по Вашему мнению, не годятся для данной группы. Допишите свои.

- 1) наверняка, обязательно, на все сто, не иначе, во что бы то ни стало, разумеется, спору нет, как пить дать, хоть тресни, зуб даю, как штык, кровь из носу, по любому, все-непременно, стопудово, само собой, несомненно
- 2) вряд ли, едва ли, вилами на воде писано, сомнительно, непохоже, не исключено
- 3) фифти-фифти, авось, шанс есть, а вдруг, может быть, а если, вроде бы, кто знает, проживем-увидим, как фишка (карта) ляжет, поди угадай
- 4) небось, скорей всего, должно быть, судя по всему, к тому дело идет

5) невозможно, речи быть не может, когда рак на горе свистнет, после дождичка в четверг, никогда, не факт, бабушка надвое сказала, ни в коем случае, после морковкина заговенья, дохлый номер, немыслимо, несбыточно

1.16 Источники случайности

1. бадминтон		контакты людей
2. детектив		трикстер
3. эпидемия		погода
4. нанотехнология		подростки
5. экспедиция		ветер
6. строительство		насекомые
7. образование		транспортные пробки
8. творение мира		мутации
9. садоводство		психически больные
10. эволюция		движение молекул

Соедините попарно стрелками или номерами некоторые процессы (явления) и соответствующие им источники случайности, непредсказуемости, нарушения планов и закономерностей. Если источник случайности подходит к нескольким процессам, то оставьте его для такого процесса, к которому нет более близкого и очевидного источника.

Составьте такую таблицу для физических явлений

1.17 Да-нет

Найдите информацию, заключенную в 4-х ответах на вопросы, предполагающие ответы ДА и НЕТ. Причем во всех вопросах вероятность ответа ДА вдвое больше вероятности ответа НЕТ.

2 Дискретные случайные величины

Да будет то свинцом к стопам твоим,
Чтобы ты шел неспешно, как усталый,
И к "да", и к "нет", когда к ним путь незрим;
Затем что между шалых -- самый шалый,
Кто утверждать берется наобум
Иль отрицать с оглядкой слишком малой.
Данте (пер. Лозинского)

2.1 Энтропия против дисперсии

Для дискретной случайной величины возможны три исхода: $n - 1$, n , $n + 1$. Симметричное распределение вероятности: $P(n-1) = (1-p)/2$, $P(n) = p$, $P(n+1) = (1-p)/2$. Докажите, что энтропия этого распределения максимальна при $p = 1/3$, а дисперсия максимальна при $p \rightarrow 0$. В каком случае мы получаем максимально непредсказуемую величину, а в каком — значения максимально удаленные от среднего? В каком пределе обе характеристики будут минимальными?

2.2 Кубик против монетки

На гранях кубика написаны числа -3 , -2 , -1 , 1 , 2 , 3 , а на сторонах монетки -3 , 3 . Постройте гистограммы распределений вероятностей для обеих случайных величин. Проверьте нормировку. Определите, у какой из них больше дисперсия, а у какой — энтропия, сначала приблизительно, на глаз. А потом посчитайте и проверьте свои догадки.

2.3 Кто случайней?

Мне же неумение поможет:
Этот Шифер ни за что не сможет
Угадать, чем буду я ходить.
В. Высоцкий

Для случайной величины X возможные исходы: $-1, 1$. Вероятности: $P(-1) = 0.5, P(1) = 0.5$.

Для случайной величины Y возможные исходы: $-1, 0, 1$. Вероятности: $P(-1) = 1/3, P(0) = 1/3, P(1) = 1/3$. Какая величина более случайная? При этом важно учесть, что под случайностью понимается два разных свойства: (1) непредсказуемость и (2) удаленность значений от среднего.

2.4 Преобразования гистограмм

На рисунке показано исходное распределение вероятностей (1) дискретной величины X , а потом несколько способов его изменения (2 — 6), приводящего к новой величине Y . Опишите эти изменения формулами. Укажите статистические характеристики: M (матожидание), D (дисперсия), $\mathcal{E}$ (энтропия), которые не меняются при этих преобразованиях.

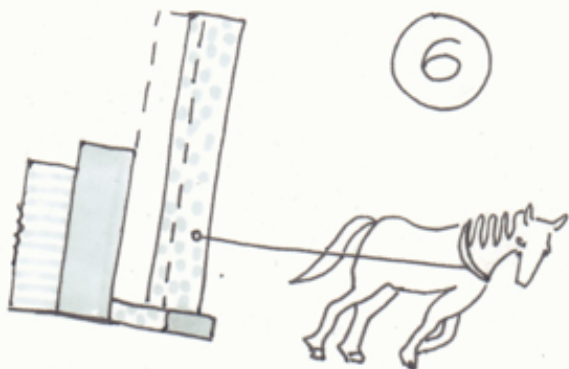
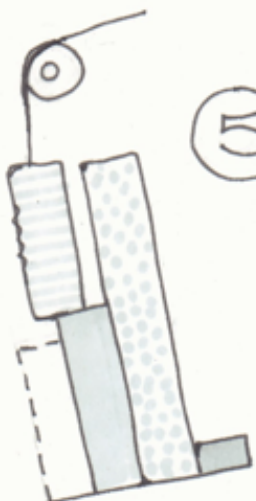
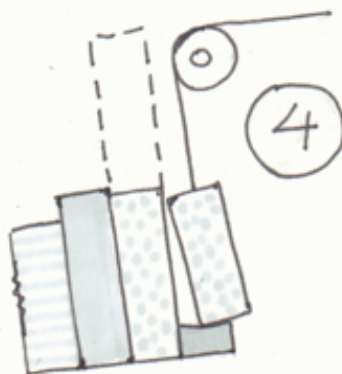
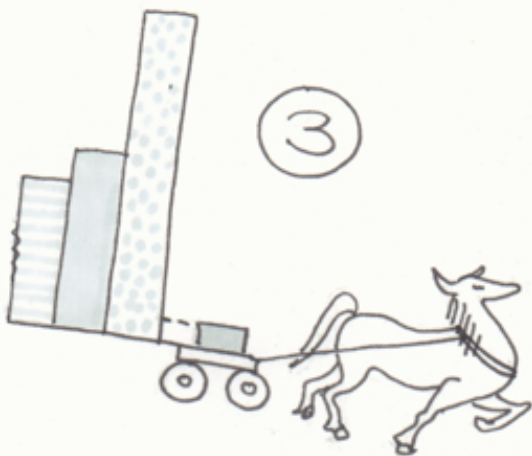
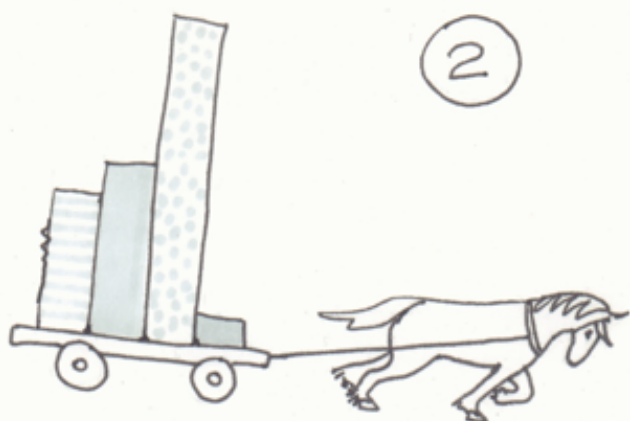
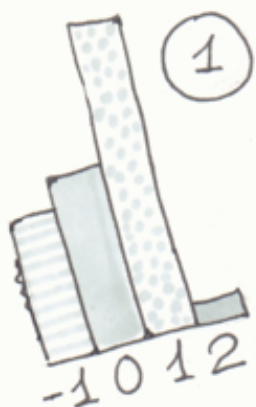
2.5 Приближенные оценки

Для величины Y из предыдущей задачи найдите те случаи, когда она может быть приближенно описана какой-то простой моделью, например, как равномерно распределенная величина или распределенная по Бернулли. Для этих случаев оцените приближенно дисперсию и энтропию.

2.6 Инварианты преобразований

Укажите статистические характеристики: M (матожидание), D (дисперсия), $\mathcal{E}$ (энтропия), которые не меняются при следующих преобразованиях от дискретной случайной величины $X > 0$ к величине Y . В ответе может быть от нуля до всех трех характеристик.

1) $Y = X + 8$ сдвиг гистограммы вправо без изменения формы



- 2) $Y = \{X, -X\}$ добавление симметричной относительно вертикальной оси гистограммы, так, что обе части станут вдвое ниже
- 3) $Y = 2X$ сдвиг гистограммы вправо, раздвигание столбцов
- 4) $Y = 2X$ если X — детерминированная величина
- 5) $Y_{max} = 2X_{max}$ увеличение максимального значения вдвое без изменения остальных значений

2.7 Изменение характеристик

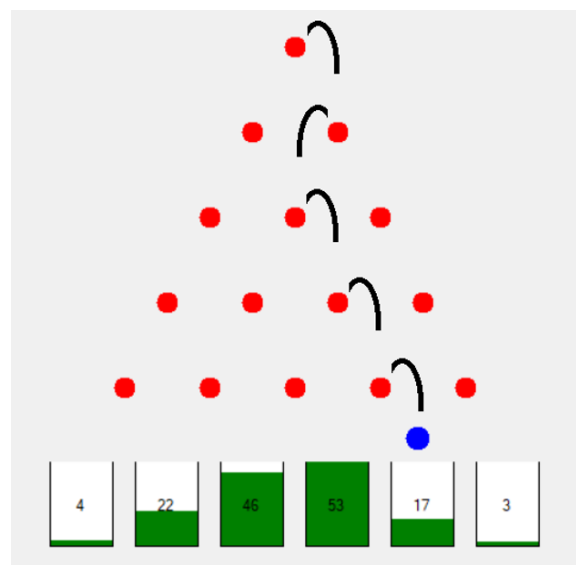
Для тех случаев из предыдущей задачи, где это возможно, укажите, как именно изменится та или иная характеристика: на сколько или во сколько раз. Изобразите схематично изменение гистограммы.

2.8 Лево-право

Из-за того, что их было трое, а надзирателей стояло против них пять, можно было словчить --- выбрать, к кому из двух правых подойти. Шухов выбрал не молодого румяного, а седоусого старого.

А. Солженицын

Изобразите схематично доску Гальтона. Шарик падает сверху и попадает на штырьки, с каждого может упасть с равными вероятностями влево или вправо. Нарисуйте на ней маршрут, задаваемый последовательностью нулей (скачок влево) и единиц (скачок вправо) 110010. Запишите в этом коде нарисованный маршрут.



2.9 Сведение к Бернулли

Докажите, что любую случайную величину, принимающую два значения, можно перевести в величину, подчиняющуюся распределению Бернулли с помощью линейного преобразования. Как применить к ней известные формулы для статистических характеристик распределения Бернулли?

2.10 Кособокость Бернулли

Докажите, что третий центральный момент, он же третий кумулянт, распределения Бернулли имеет вид

$$\langle (n - \langle n \rangle)^3 \rangle = p (1 - 3p + 2p^2)$$

Что можно сказать относительно того, в какую сторону гистограмма распределения отклоняется от симметричного вида? Подтверждает ли этот результат общее правило для коэффициента асимметрии?

2.11 Дисперсия равномерного

Докажите, что равномерное распределение дискретной величины, принимающей n идущих подряд целых значений, имеет дисперсию $\sigma^2 = (n^2 - 1)/12$

2.12 Генерация равномерного

Предложите механизм генерации равномерной целой случайной величины, принимающей значения, например, от 1 до 37, с помощью игральные кости различной формы так, чтобы понадобилось минимальное число бросков. Можно перебрасывать кости, если выпало ненужное значение. Это может понадобиться для случайного выбора билета на экзамене.

2.13 Приключения Самой-Самой

Перед каждым на виду висит долбица умножения, а под рукою стирабельная дощечка: все, что который мастер делает, --- на долбицу смотрит и с понятием сверяет, а потом на дощечке одно пишет, другое стирает и в аккурат сводит: что на цифирях написано, то и на деле выходит.

Н. Лесков

N молекул идеального газа находятся в сосуде объемом (площадью) V , в котором мысленно выделили закрашенную область объемом (площадью) v . Предположим, мы выделили одну частицу и следим за ней, вычисляя вероятности происходящих с ней событий. Найдите соответствие получившихся вероятностей (A — G) событиям (1 — 7). Вероятности

$$(A) \frac{v}{V}, \quad (B) \left(\frac{v}{V}\right)^2 \left(1 - \frac{v}{V}\right)^{N-2},$$

$$(C) \left(\frac{v}{V}\right)^2 \left(1 - \frac{v}{V}\right)^{N-2} (N-1)(N-2),$$

$$(D) \left(1 - \frac{v}{V}\right), \quad (E) \left(\frac{v}{V}\right)^{N-2} \left(1 - \frac{v}{V}\right)^2 (N-1),$$

$$(F) \left(\frac{v}{V}\right)^2 \left(1 - \frac{v}{V}\right)^{N-2} (N-1), \quad (G) \frac{v}{V} \left(1 - \frac{v}{V}\right)^{N-1}$$

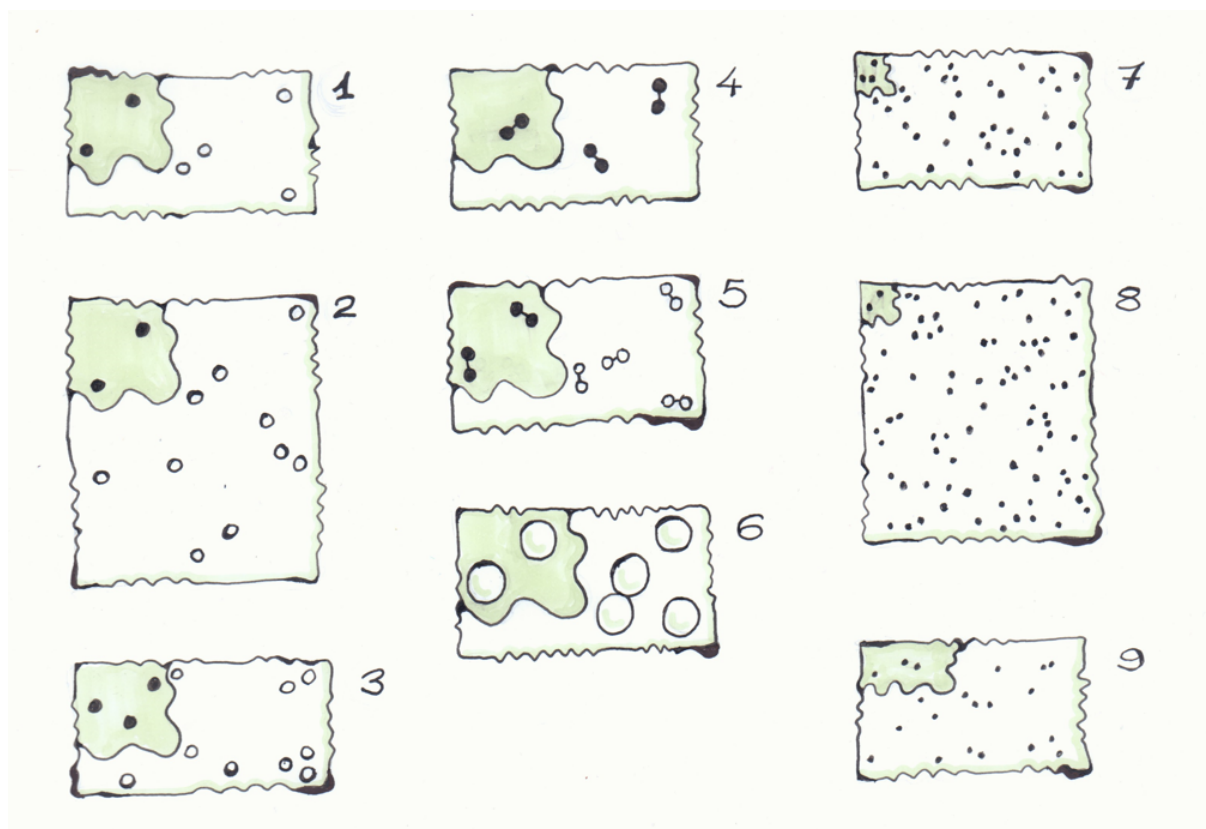
- 1) Она попала в выделенный объем
- 2) Она не попала в выделенный объем
- 3) Она оказалась в выделенном объеме одна
- 4) Она оказалась в выделенном объеме вдвоем вместе с другой тоже выделенной частицей
- 5) Она оказалась в выделенном объеме вдвоем вместе с любой частицей
- 6) В выделенном объеме было ровно две любые частицы, а наша выделенная была снаружи

- 7) Она оказалась вне выделенного объема вдвоем вместе с любой частицей, а все остальные частицы в выделенном объеме

2.14 Молекулы в закуске

Уже в петлях скрипела дверь
И в стены бил прибор с разбега,
И я, как запоздалый зверь,
Вошел последним внутрь ковчега.

М. Волошин



На рисунке показано изначальное (1) состояние N молекул идеального газа в сосуде объемом (площадью) V , в котором мысленно выделили закрашенную область объемом (площадью) v . Число молекул n , оказавшихся в некоторый момент в выделенной области является дискретной случайной величиной и описывается распределением вероятностей. Укажите

статистические характеристики: M (матожидание), D (дисперсия), Θ (энтропия), которые не меняются при следующих преобразованиях системы. В ответе может быть от нуля до всех трех характеристик.

- 1) Перенесение выделенного объема в другую часть сосуда без изменения его размера
- 2) Одновременное увеличение числа частиц до $2N$ и объема сосуда до $2V$, до состояния (2)
- 3) Увеличение числа частиц до $2N$, до состояния (3)
- 4) Все N атомов соединились в двухатомные молекулы, до состояния (4). Мы изучаем число атомов в выделенном объеме
- 5) В сосуд добавили еще N атомов, а потом все атомы соединились в двухатомные молекулы, до состояния (5). Мы изучаем число молекул в выделенном объеме
- 6) Все атомы стали гораздо большего размера, до состояния (6), так, что модель идеального газа больше не применима
- 7) При условиях, что $v \ll V$ и $N \gg 1$, состояние (7), перенесение выделенного объема в другую часть сосуда без изменения его размера и увеличение числа частиц до $2N$
- 8) При условиях, что $v \ll V$ и $N \gg 1$, состояние (7), одновременное увеличение числа частиц до $2N$ и объема сосуда до $2V$, до состояния (8)
- 9) При условиях, что $v \ll V$ и $N \gg 1$, состояние (7), одновременное уменьшение числа частиц до $N/2$ и увеличение выделенного объема сосуда до $2v$, до состояния (9)

2.15 Изменения статистики

Для тех случаев из предыдущей задачи, где это возможно, укажите, как именно изменится та или иная характери-

ка: на сколько или во сколько раз. Изобразите схематично изменение гистограммы.

2.16 Биномиальное против Пуассона

Сравнивая пункты 1 — 6 из той же задачи с пунктами 7 — 9, опишите различия биномиального распределения (Б) и распределения Пуассона (П). Укажите, к какому распределению относится каждое утверждение

- 1) оно однопараметрическое (задается одним параметром)
- 2) оно двухпараметрическое
- 3) оно является частным случаем второго из них
- 4) зависит только от концентрации частиц и размера выделенного объема
- 5) переходит в детерминированное с ненулевым значением
- 6) применимо при малом числе частиц в объеме

2.17 Модификации Гальтона

Изобразите схематично, какое распределение получится в доске Гальтона, если во время падения шариков

- 1) сильно трясти доску в горизонтальном направлении?
- 2) добиться того, чтобы шарики попадали в нее с почти полностью одинаковыми начальными скоростями и координатами?
- 3) чуть-чуть наклонить доску так, что вероятность падения со штырька влево будет немного больше вероятности падения вправо
- 4) поставить посередине под самым верхним штырьком вертикальную перегородку так, что шарик, попавший в начале в левую половину не сможет уже попасть в правую и наоборот, отражаясь от перегородки.

- 5) поставить посередине горизонтальную перегородку с двумя отверстиями так, что смогут проходить только шарики, попавшие в эти отверстия. Одно отверстие посередине, а второе сбоку.

2.18 Диалог частиц Гальтона

Напишите небольшой диалог между двумя частицами в доске Гальтона или монолог одной из них. Отрадите в нем статистические закономерности процессов.

2.19 Число соударений

Для изображений траекторий (A — F) с указанием числа столкновений за некоторую длину траектории. Найдите соответствующие экспериментальные гистограммы (1 — 6), где указано число реализаций. Сравните эти гистограммы с теоретическими.

2.20 Пуассон

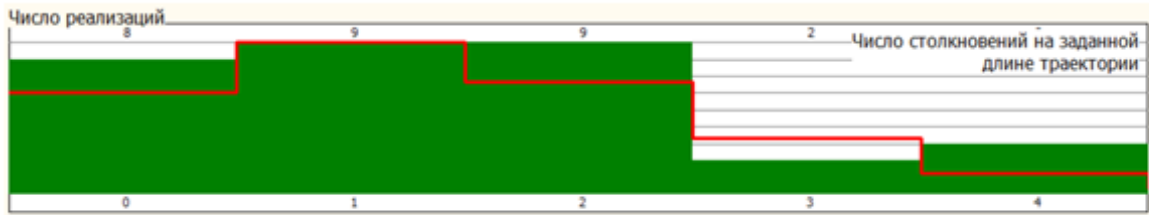
Найдите математическое ожидание и дисперсию для случайной величины, распределенной по закону Пуассона

$$P_k = \frac{\alpha^k e^{-\alpha}}{k!}, \quad k \geq 0$$

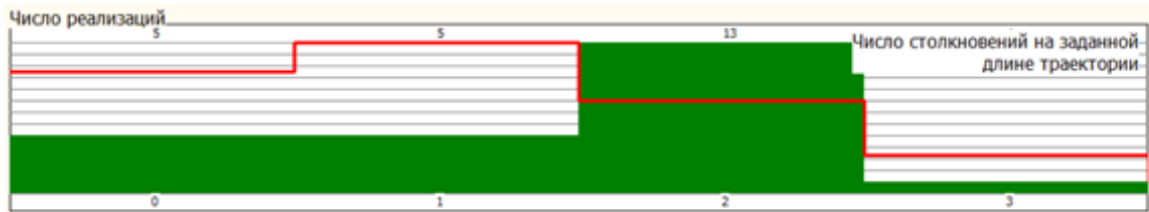
2.21 Физик и Математик

Объясните анекдот: Чем очень старый Физик отличается от очень старого Математика? Математик помнит еще разложение в ряд экспоненты, а Физик верит, что распределение Пуассона нормировано. Про какое распределение можно составить аналогичный анекдот, связанный с биномом Ньютона?

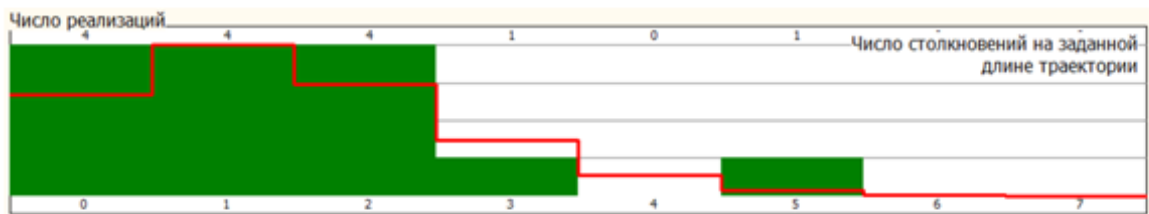




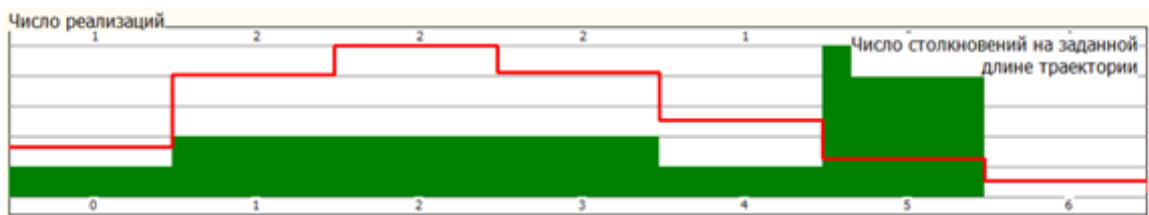
1



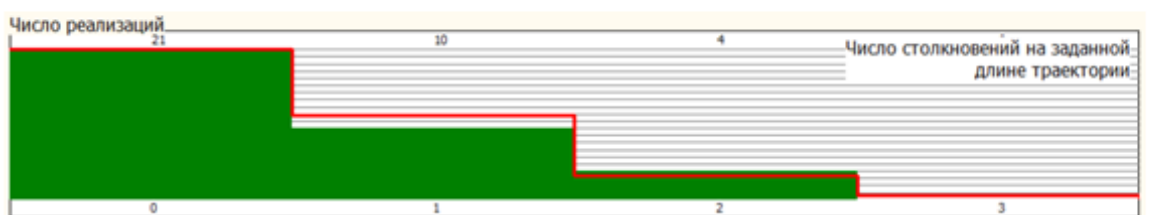
2



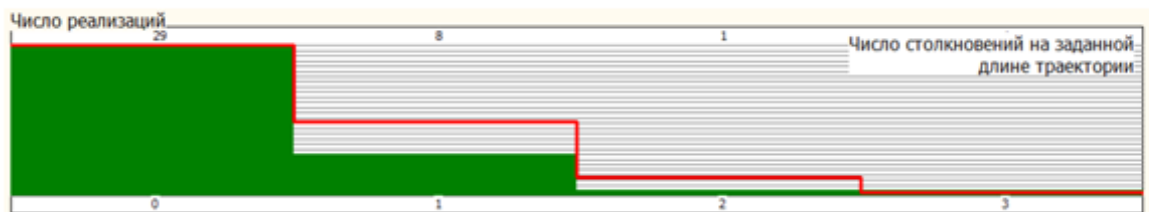
3



4



5



6

2.22 Свой Пуассон

Мы обожаем лекции. Мы сидим и смотрим на беднягу в упор, пока он не собьется. В прошлом семестре один тип стал икать. Как вы думаете, мистер Вустер будет икать?

П. Г. Вудхаус

Приведите свои примеры дискретных величин, распределенных по закону Пуассона. Например, это может быть число некоторых независимых событий, произошедших за некоторый интервал времени. Это удобно изобразить как точки на оси времени.

2.23 От биномиального к Пуассону

Получите распределение Пуассона $P(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, ($k \geq 0$) как предельный переход от биномиального распределения $P_N(k) = p^k(1-p)^{N-k} \frac{N!}{k!(N-k)!}$, ($0 \leq k \leq N$) при $N \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$ и $Np = \lambda = \text{const}$. Для этого нужно заменить p на λ/N и использовать второй замечательный предел.

2.24 Пуассон против Равномерного

Из двух строк случайных чисел одна соответствует распределению Пуассона, а вторая — равномерному. Определите, где какому. Приблизительно оцените средние значения.

1)

14, 13, 9, 5, 10, 10, 9, 16, 10, 13, 9, 18, 9, 7, 6
3, 4, 2, 2, 5, 2, 4, 4, 1, 2, 4, 2, 3, 4, 3

2)

4, 4, 9, 4, 2, 4, 5, 5, 2, 5, 10, 3, 3, 8, 4
8, 8, 6, 1, 7, 8, 8, 5, 1, 1, 4, 3, 4, 6, 5

3)

2, 7, 5, 4, 3, 4, 5, 6, 4, 5, 7, 1, 6, 7, 6
9, 11, 9, 14, 11, 16, 6, 7, 7, 10, 8, 11, 6, 7, 5

4)

1, 1, 2, 4, 4, 4, 7, 7, 2, 9, 5, 1, 11, 10, 10
3, 4, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 6, 0, 4, 3, 2, 1, 2

5)

6, 12, 2, 11, 4, 11, 1, 7, 12, 3, 2, 11, 3, 7, 9
6, 7, 14, 3, 10, 13, 12, 9, 7, 8, 9, 11, 6, 9, 11

6)

3, 5, 6, 1, 2, 2, 4, 5, 10, 5, 0, 1, 2, 3, 7
11, 4, 5, 12, 3, 5, 3, 8, 10, 2, 11, 10, 2, 7, 2

7)

38, 6, 8, 6, 7, 3, 5, 1, 8, 1, 2, 8, 4, 5, 3
19, 12, 11, 13, 18, 9, 14, 7, 6, 11, 14, 9, 7, 12, 10

8)

4, 5, 1, 2, 2, 3, 4, 3, 4, 3, 3, 4, 4, 4
3, 6, 7, 4, 6, 7, 1, 6, 1, 2, 6, 5, 2, 5, 6

3 Переходы между дискретными и непрерывными случайными величинами

Бескорыстная и безудержная радость
классифицирующего и дефинирующего
рассудка

С. Аверинцев

3.1 Понятность дискретных величин

Построение физической модели часто оказывается более простым и наглядным для дискретного описания. Поэтому часто искусственно вводятся шаги по времени и пространству. Или непрерывная величина, например, длина волны света, описывается в виде дискретного набора интервалов, цвета. Понимание чего-либо начинается с классификации, то есть проведения границ между разными видами, типами, категориями. Это свойство человеческого мышления отражено в повседневном языке. Например, суффикс **-ОВАТ-** означает частичность присутствия какого-то признака, неполноту, необходимость описывать этот признак как непрерывную величину. Среди следующих слов отделите те, которые нельзя (неграмотно) использовать с этим суффиксом, и сделайте вывод.

Зеленый, длинный, умный, глухой, толстый, глупый, зоркий, страшный, плохой, красивый, глупый, свежий.

3.2 Дискретная против Непрерывной

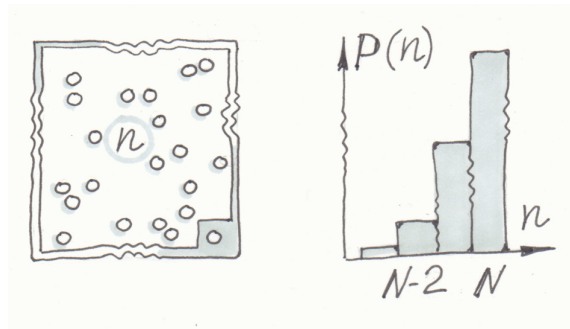
Важным преимуществом непрерывных величин является возможность вычислений с помощью производных и интегралов. Поэтому многие физические величины рассматривают и как

дискретные, и как непрерывные. Следующие величины разделите на те, которые можно описывать только как непрерывные (Н), только как дискретные (Д) и применять оба описания (НД):

- 1) Число частиц идеального газа в выделенном объеме
- 2) Координата молекулы
- 3) Энергия двухуровневой квантовой системы
- 4) Угол вектора скорости
- 5) Число степеней свободы
- 6) Размерность пространства

3.3 Условия перехода от дискретной случайной величины к непрерывной

Вот пример того, что обычного, часто используемого, условия $n \gg 1$ недостаточно. Рассмотрим число частиц в выделенном объеме немного меньшем полного объема сосуда. То-



гда случайная величина может принимать малый набор значений с не пренебрежимо малой вероятностью, например, $N, N - 1, N - 2, N - 3$. Распределение этой величины строго дискретное. При больших N условие $n \gg 1$ выполняется, но не обеспечивает перехода к непрерывному описанию. Докажите, что распределение в равновесном состоянии такое, чтобы давать Пуассоновское для числа частиц в оставшейся части объема

$$P(n) = \frac{\lambda^{N-n} e^{-\lambda}}{(N - n)!}$$

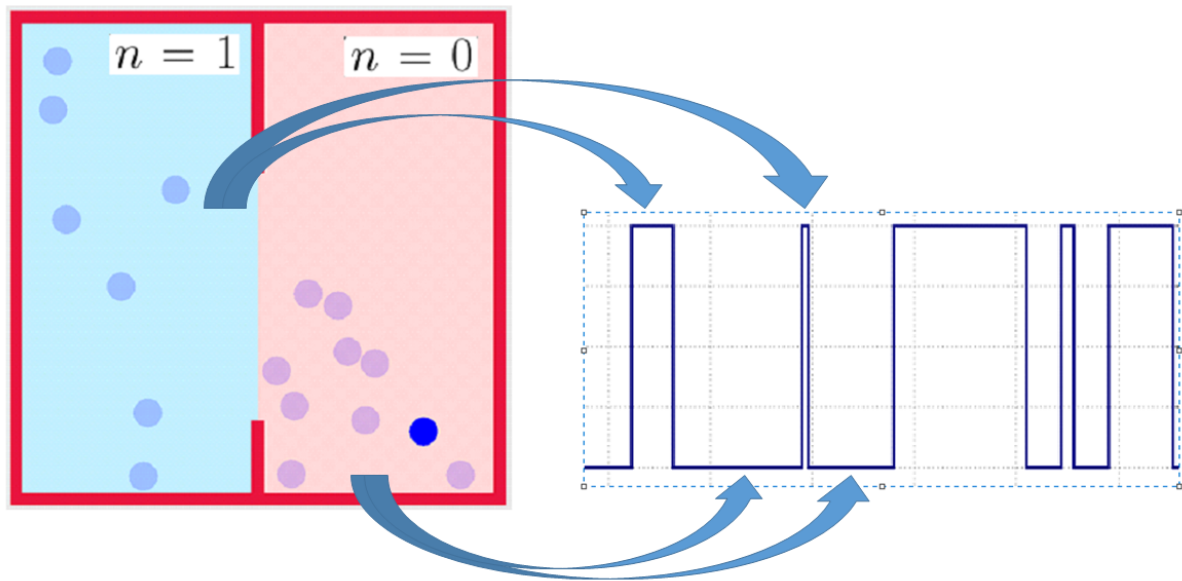
3.4 Замкнутый круг

Вообще, вопрос о замене дискретного описания на непрерывное сводится к возможности описать гистограмму гладкой линией. Критерий

$$|P_{n+1} - P_n| \ll \min[P_{n+1}, P_n]$$

будет точным. Но его применение требует знания всего распределения. А переход к непрерывному описанию для того и нужен, чтобы найти это распределение с помощью математического аппарата, основанного на интегрировании и дифференцировании. Получается замкнутый круг. Предложите свой способ решения этой проблемы.

3.5 Бернулли и Экспоненциальное



Часто дискретные и непрерывные величины связаны так, что одна из них нужна для описания другой. Например, представим частицу, которая движется хаотически и может попадать в выделенный объем ($n = 1$) или выходить из него ($n = 0$). Тогда n — дискретная величина, распределенная с распределением Бернулли. А время t_1 , в течении которого она

находится в выделенном объеме, и время t_2 , в течение которого она находится вне выделенного объема, — это непрерывные случайные величины, распределенные экспоненциально с заданными средними значениями $\langle t_1 \rangle$ $\langle t_2 \rangle$

- 1) Запишите распределения для t_1 и t_2
- 2) Запишите распределение для n
- 3) Найдите вероятности в единицу времени для входа частицы в выделенный объем и для выхода
- 4) Какие предположения сделаны для того, чтобы распределения времен были экспоненциальными? При каких физических условиях на движение частицы и свойства сосуда они выполняются?
- 5) Что зависит от числа частиц?
- 6) Что зависит от температуры?

3.6 Барьер против перегородки

Лишь два пути раскрыты для существ,
Застигнутых в капканах равновесья:
Путь мятежа и путь приспособленья.
М. Волошин

Чем процесс из предыдущей задачи про частицу в выделенном объеме отличается от задачи, когда частица хаотически движется между двумя потенциальными ямами, преодолевая потенциальный барьер между ними? Как каждая из систем зависит от температуры? В чем разница равновесных распределений? Как отличаются времена достижения равновесия?

3.7 Электроны к аноду

Электроны подлетают к аноду с одинаковой скоростью v . Проекция расстояний между соседними (ближайшими) элек-

тронами на направление, перпендикулярное аноду, являются независимыми случайными величинами со средним значением λ . Запишите вероятность того, что за время $T \gg \lambda/v$ к аноду подлетят N электронов.

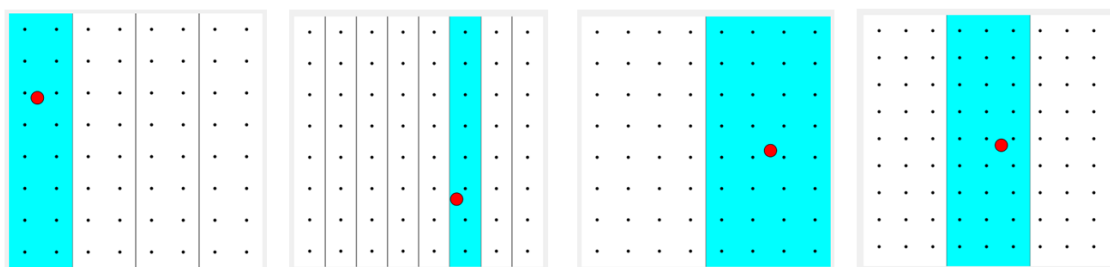
3.8 Непрерывный Бернулли

Проверьте с помощью формул для непрерывных величин, что распределение Бернулли, записанное как непрерывное с помощью δ -функции, имеет те же статистические характеристики, что и дискретное распределение Бернулли.

3.9 Энтропия отсеков

Вернувшись на тротуар, Страйк закурил и посмотрел сначала в одну, потом в другую сторону. По его прикидке на Шарлемонт-роуд было домов двести. Сколько уйдет времени на то, чтобы постучаться в каждую дверь?

Р. Гэлбрейт (Дж.К.Роулинг)



Найдите энтропию расположения блуждающей частицы для всех четырех сосудов, если случайной величиной является номер области по порядку слева направо. Как этот результат связан с возможностью предсказать, в какой области частица? Докажите, что энтропия координаты как непрерывной величины одинакова для всех картинок.

3.10 Два равномерных

Сравните статистические характеристики непрерывного и дискретного равномерных распределений. Когда разница заметней?

3.11 Ширина бинов

Сформулируйте основные правила выбора ширины бинов в распределении непрерывной величины. Пронумеруйте их в порядке убывания важности.

3.12 Все дороги ведут к Гауссу

Пользуясь следующим алгоритмом, изучите переходы к гауссовскому распределению от (1) Пуассоновского, (2) Биномиального распределения. А затем получите такой же переход для распределения номера ячейки в доске Гальтона

(1)

1. Раскладываем случайную величину на среднее и флуктуацию. Далее будем учитывать, что среднее много больше флуктуации

$$n = \lambda + \xi, \quad (1)$$

2. Выносим в константу все, что не зависит от флуктуации. Далее можно будет сбрасывать в эту константу все, что не нужно для вычислений, с одним только условием, чтобы это не зависело от флуктуации

$$\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = \frac{\lambda^\lambda \lambda^\xi e^{-\lambda}}{\lambda! (\lambda + 1)(\lambda + 2) \dots (\lambda + \xi)} = \quad (2)$$

$$= \text{const} \frac{\lambda^\xi}{(\lambda + 1)(\lambda + 2) \dots (\lambda + \xi)} = \quad (3)$$

3. Записываем факториалы и показательные функции в виде произведения

$$= \text{const} \prod_{i=1}^{\xi} \frac{\lambda}{\lambda + i} = \text{const} \prod_{i=1}^{\xi} \left(1 + \frac{i}{\lambda}\right)^{-1} = \quad (4)$$

4. С помощью экспоненты логарифма превращаем произведение в сумму

$$\text{const} \exp \left[\ln \prod_{i=1}^{\xi} \left(1 + \frac{i}{\lambda}\right)^{-1} \right] = \text{const} \exp \left[- \sum_{i=1}^{\xi} \ln \left(1 + \frac{i}{\lambda}\right) \right] \approx \quad (5)$$

5. Подгоняем логарифм под вид, удобный для разложения в ряд до линейного члена, с учетом малости флуктуации по сравнению со средним, и раскладываем

$$\approx \text{const} \exp \left[- \sum_{i=1}^{\xi} \frac{i}{\lambda} \right] = \quad (6)$$

6. Суммируем арифметическую прогрессию и учитываем переход к непрерывным величинам, например, то, что прибавлением единицы можно пренебречь

$$= \text{const} \exp \left[- \frac{\xi(\xi + 1)}{2\lambda} \right] \approx \text{const} \exp \left[- \frac{\xi^2}{2\lambda} \right] = \quad (7)$$

7. Приводим к стандартному виду гауссовского распределения с правильной нормировкой

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \exp \left[- \frac{(n - \lambda)^2}{2\lambda} \right]. \quad (8)$$

(2)

1. Раскладываем случайную величину на среднее и флуктуацию. Далее будем учитывать, что среднее много больше флуктуации

$$n = Np + \xi, \quad (9)$$

$$p^n (1-p)^{N-n} \frac{N!}{n!(N-n)!} = \quad (10)$$

$$= p^{Np+\xi} (1-p)^{N-Np-\xi} \frac{N!}{(Np+\xi)!(N-Np-\xi)!} = \quad (11)$$

$$p^{Np+\xi} (1-p)^{N-Np-\xi} \frac{(N-Np-\xi+1)(N-Np-\xi+2)\dots(N-Np)N!}{(Np)!(Np+1)(Np+2)\dots(Np+\xi)(N-Np)!}$$

2. Выносим в константу все, что не зависит от флуктуации. Далее можно будет сбрасывать в эту константу все, что не нужно для вычислений, с одним только условием, чтобы это не зависело от флуктуации

$$= \text{const} (Np)^\xi (N-Np)^{-\xi} \frac{(N-Np-\xi+1)(N-Np-\xi+2)\dots(N-Np)}{(Np+1)(Np+2)\dots(Np+\xi)}$$

3. Записываем факториалы и показательные функции в виде произведения

$$= \text{const} \prod_{i=1}^{\xi} \frac{Np}{Np+i} \cdot \prod_{j=1}^{\xi} \frac{N-Np-\xi+j}{N-Np} \quad (12)$$

$$= \text{const} \prod_{i=1}^{\xi} \left(1 + \frac{i}{Np}\right)^{-1} \cdot \prod_{m=1}^{\xi} \left(1 - \frac{m}{N-Np}\right) = \quad (13)$$

4. С помощью экспоненты логарифма превращаем произведение в сумму

$$= \text{const} \exp \ln \left[\prod_{i=1}^{\xi} \left(1 + \frac{i}{Np}\right)^{-1} \cdot \prod_{m=1}^{\xi} \left(1 - \frac{m}{N-Np}\right) \right] = \quad (14)$$

$$= \text{const} \exp \left[\sum_{i=1}^{\xi} \ln \left(1 + \frac{i}{Np}\right)^{-1} + \sum_{m=1}^{\xi} \ln \left(1 - \frac{m}{N-Np}\right) \right] \approx \quad (15)$$

5. Подгоняем логарифм под вид, удобный для разложения в ряд до линейного члена, с учетом малости флуктуации по сравнению со средним, и раскладываем

$$\approx \text{const} \exp \left[- \sum_{i=1}^{\xi} \frac{i}{Np} - \sum_{m=1}^{\xi} \frac{m}{N - Np} \right] = \quad (16)$$

6. Суммируем арифметическую прогрессию и учитываем переход к непрерывным величинам, например, то, что прибавлением единицы можно пренебречь

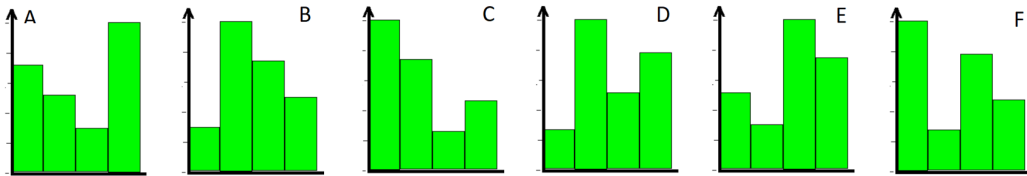
$$= \text{const} \exp \left[- \frac{\xi(\xi + 1)}{2Np} - \frac{\xi(\xi + 1)}{2(N - Np)} \right] \approx \quad (17)$$

$$\approx \text{const} \exp \left[- \frac{\xi^2}{2Np(1 - p)} \right] = \quad (18)$$

7. Приводим к стандартному виду гауссовского распределения с правильной нормировкой

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi Np(1 - p)}} \exp \left[- \frac{(n - Np)^2}{2Np(1 - p)} \right]. \quad (19)$$

3.13 Буря мглою



То, как зверь, она завоет,
То заплачет, как дитя,
То по кровле обветшалой
Вдруг соломой зашумит,
То, как путник запоздалый,
К нам в окошко застучит.

Рассмотрим непрерывную случайную величину ξ , характеризующую степень зашумленности звука в некоторый момент времени во время бури. Эта зашумленность будет проявляться в ширине спектра звука. Если это одна нота, то спектр узкий, чем больше разных частот, тем шире спектр. Для простоты Пушкин сводит эту величину к четырем категориями: вой, плач, шуршание, стук. То есть заменяет непрерывную величину ξ на дискретную величину n , принимающую четыре значения. Будем считать, что он перечисляет их в порядке убывания длительности каждого типа звука и переходы между ними происходят случайно. Какая гистограмма (А — F) приближенно отражает распределение вероятностей n ?

4 Базовые распределения вероятностей в физике

Varietas delectat --- Разнообразие приятно
(крылатое латинское выражение)

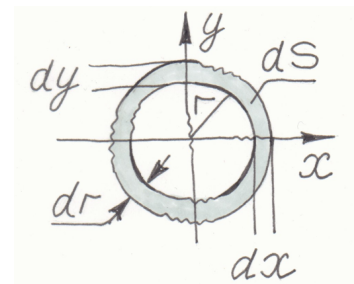
4.1 Норм

Найдите математическое ожидание, дисперсию и энтропию для случайной величины, распределенной по нормальному закону

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - m_1)^2}{2\sigma^2}\right).$$

4.2 Норм норма

Докажите нормировку нормального закона, не используя кратных интегралов и якобианов, а с помощью перехода к распределению Рэлея для двухмерной задачи. Это можно сделать на основе геометрических построений, с учетом того, что площадь бесконечно тонкого кольца $dS = 2\pi r dr$. Нормировка для распределения Рэлея считается простой заменой переменной.



4.3 11-мерный газ

Для них, наивных, непоколебимых,
Сомнения наши -- просто вздор и бред.
Мир -- плоскость, нам твердят они, и нет
Ни грана правды в сказках о глубинах.

Г. Гессе

Запишите плотность распределения вероятностей для модуля скорости 11-мерного идеального газа при температу-

ре T . Масса молекулы m . Константу нормировки можно не вычислять. Для этого можно воспользоваться рассуждениями из предыдущей задачи. Переход в двумерное пространство приводит к предэкспоненциальному множителю в первой степени. Этот множитель описывает тот факт, что кольцо с меньшим радиусом имеет меньшую площадь и, соответственно, меньшую вероятность обнаружить там частицу. Аналогично тому, как в цирке на первом ряду мало дорогих мест, а на последнем — много дешевых. Далее этот подход можно обобщить на случай шаровых слоев для трехмерного пространства и т. д.

4.4 Перегиб

Докажите, что в нормальном распределении $x = \sigma$ является точкой перегиба.

4.5 Двумерный газ

Рассмотрим модель двумерного движения N молекул идеального газа в сосуде длиной a и шириной b , при температуре T . Молекулы представлены шариками радиуса r_0 , сталкивающимися друг с другом и со стенками по закону упругого удара. Определите, какой плотностью распределения вероятностей описывается какая-нибудь из следующих флуктуирующих величин, и оцените ее среднее значение

- 1) Угол φ между направлением вектора скорости шарика и осью OX
- 2) Координата шарика x
- 3) Проекция v_x скорости шарика на ось OX
- 4) Модуль скорости v
- 5) Кинетическая энергия

4.6 Проекция скорости молекулы

Изобразите схематично нормальное распределение горизонтальной компоненты скорости молекулы идеального газа в сосуде на графике с пустым пространством вокруг. Изобразите распределение, описывающее ее изменение в результате процесса на Ваш выбор. Постарайтесь соблюсти нормировку. Например, если новое распределение окажется шире, то оно должно стать ниже, чтобы площадь под графиком была примерно такой же



- 1) Сосуд начал двигаться влево, температура не изменилась
- 2) Сосуд начал двигаться вправо, температура не изменилась
- 3) Сосуд начал двигаться влево, температура увеличилась
- 4) Сосуд начал двигаться влево, температура уменьшилась
- 5) Сосуд нагрели
- 6) Сосуд охладили
- 7) Сосуд начал двигаться вверх, температура увеличилась
- 8) Сосуд начал двигаться вниз, температура уменьшилась
- 9) Газ расширился, температура не изменилась
- 10) Газ сжали, температура не изменилась
- 11) Газ сжали адиабатически
- 12) Газ расширился, температура уменьшилась
- 13) В сосуд добавили более нагретые молекулы
- 14) В сосуд добавили более холодные молекулы

- 15) В сосуд добавили молекулы той же температуры
- 16) В сосуд добавили молекулы, газ расширился, температура не изменилась
- 17) Ваш вариант причин ее изменения.

4.7 Изменение Гаусса

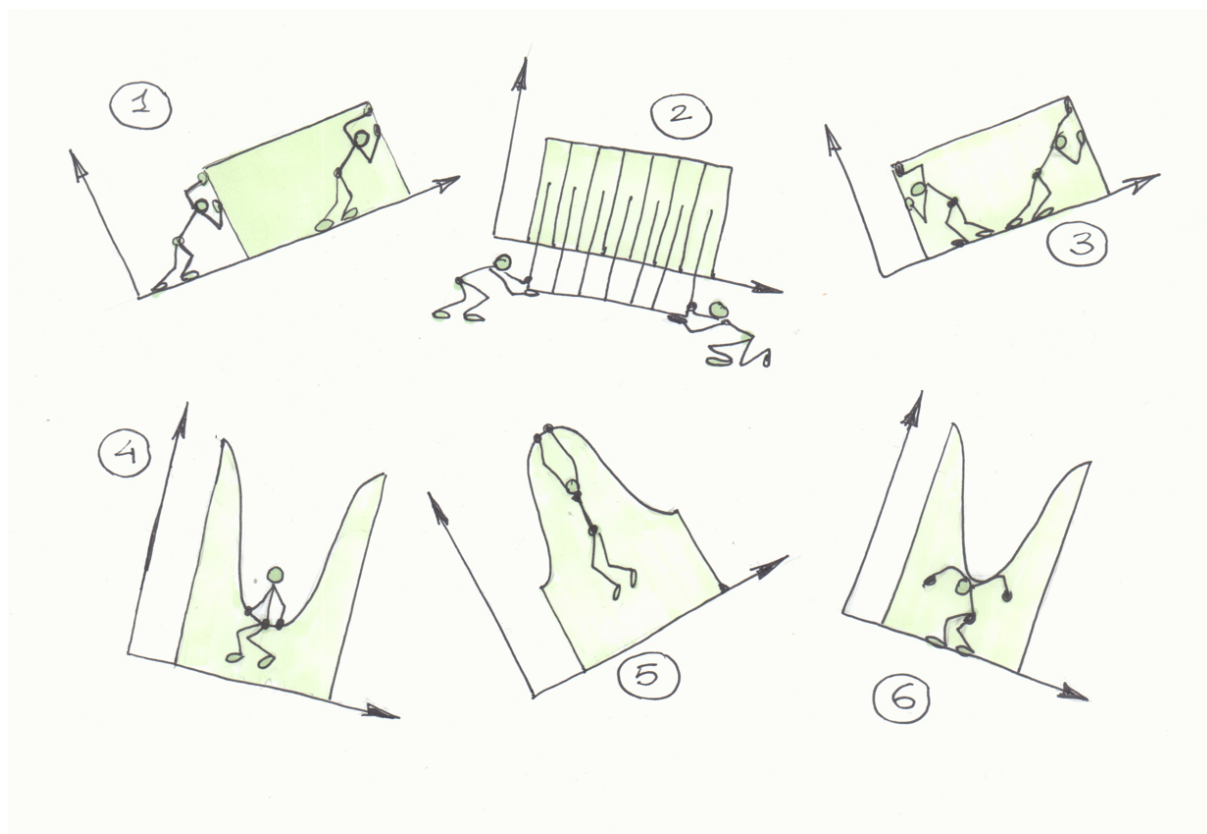
Аналогично предыдущей задаче, изобразите распределение, описывающее изменение со временем соответствующей случайной величины на Ваш выбор

- 1) Размеры области пространства у дна в бесконечно высоком вертикальном цилиндре в поле силы тяжести, содержащей половину всех молекул идеального газа, если температура уменьшилась
- 2) Сумма очков на многих кубиках, если к ним добавляются еще кубики
- 3) Длина траектории молекулы идеального газа за некоторое большое количество столкновений, если увеличилась плотность частиц
- 4) Погрешности в научных измерениях детерминированной величины в связи с использованием лазерных технологий
- 5) Длина траектории молекулы идеального газа за некоторое большое количество столкновений, если увеличилась температура
- 6) Флуктуации высоты положения поршня после нагрева газа под ним
- 7) Проекция скоростей молекул, если газ охладили
- 8) Расстояние от стартовой точки диффундирующей частицы с течением времени при одномерном движении
- 9) Проекция координаты молекулы в параболической потенциальной яме, если увеличилась температура

10) Ваш вариант случайной величины и причин ее изменения.

4.8 Инварианты преобразований

Укажите статистические характеристики: M (матожидание), D (дисперсия), $\mathcal{E}$ (энтропия), которые не меняются при показанных на рисунке преобразованиях. В ответе может быть от нуля до всех трех характеристик.



4.9 Изменение характеристик

Для тех случаев из предыдущей задачи, где это возможно, укажите, как именно изменится та или иная характеристика.

4.10 Деформации Гаусса

Изобразите с помощью человечков или стрелочек преобразования распределений вероятности, приводящие к нарушению свойств нормального распределения. Укажите, какие из них соответствуют только нормальному распределению, а какие любому распределению вероятностей.

4.11 Свойства Гаусса и равномерного

Расставьте у номеров буквы (Г) у тех утверждений, которые верны для распределения Гаусса, буквы (Р) для равномерных, (ГР), если верно для обоих и (), если ни для одного

1. Матожидание соответствует наивероятнейшему значению ...
2. Принимает ненулевые значения в ограниченной области ...
3. Является распределением с наибольшей энтропией из всех ограниченных распределений ...
4. Является бесконечно-делимым ...
5. Чем ближе значение к среднему, тем вероятней ...
6. Сумма двух величин распределена по треугольному распределению Симпсона ...
7. Непрерывно убывает с увеличением отклонения от среднего ...
8. Приближенно описывает частоту появления каждой цифры в записи числа π ...
9. Симметричное ...
10. Неотрицательное ...
11. Всегда положительное ...
12. Всегда меньше 1 ...
13. Описывает модуль вектора скорости молекулы идеального газа ...
14. Записывается с помощью функции Хэвисайда ...

15. Описывает высоту положения поршня в сосуде с газом ...
16. Сводится предельным переходом к дельта-функции Дирака ...
17. Описывает проекцию вектора скорости молекулы идеального газа ...
18. Интеграл от него описывается элементарной функцией ...
19. Интеграл от него описывается набором линейных функций ...
20. К этому распределению стремится распределение для номера ячейки в доске Гальтона ...
21. К этому распределению стремится распределение для результата выпадения правильного многогранника при увеличении числа граней...
22. Описывает угол направления вектора скорости молекулы идеального газа ...
23. Описывает кинетическую энергию молекулы идеального газа ...
24. К этому распределению стремится распределение суммы независимых случайных величин ...
25. Описывает угол падения молекулы идеального газа на стенку ...
26. Описывает угловую скорость вращающейся броуновской частицы ...
27. Для значений, бесконечно далеких от среднего стремится к или равно нулю ...
28. Имеет максимум, похожий на параболу ...
29. Описывает длину свободного пробега между соударениями ...
30. Описывает потенциальную энергию в поле силы тяжести ...
31. Описывает потенциальную энергию в центрифуге ...

32. Описывает число частиц, ударившихся о стенку за время много большее времени свободного пробега ...

33. Описывает угловую скорость вращающейся броуновской частицы ...

34. Описывает угол поворота вращающейся броуновской частицы ...

35. Может быть приближенно заменено косинусом на пьедестале ...

36. Описывает вертикальную координату молекулы в замкнутом сосуде в поле силы тяжести при очень большой температуре ...

37. Описывает число молекул, движущихся со скоростью большей средней ...

38. Описывает относительную скорость двух молекул идеального газа ...

39. Описывает проекцию относительной скорости ...

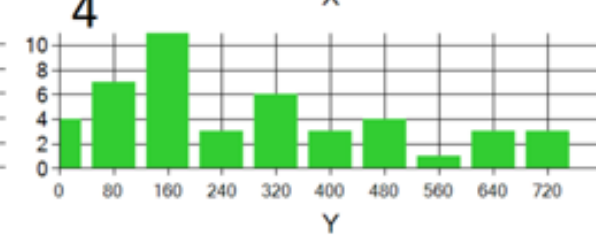
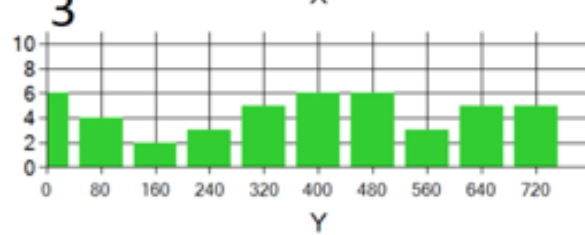
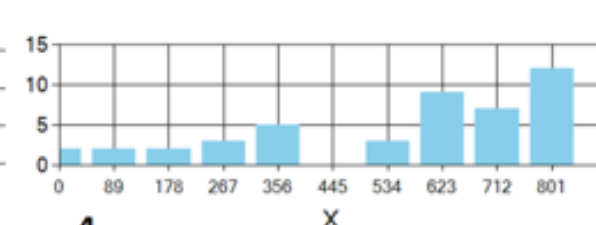
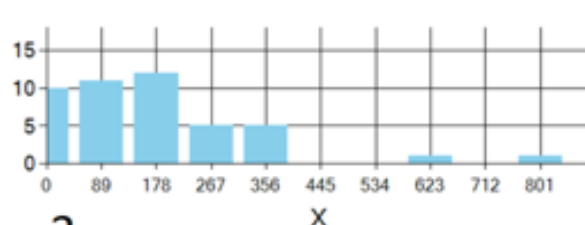
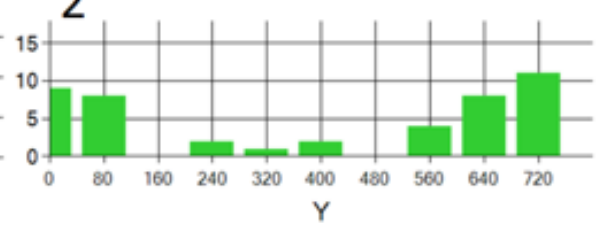
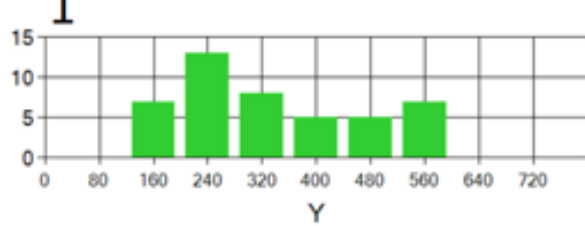
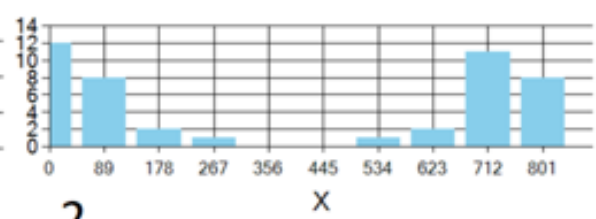
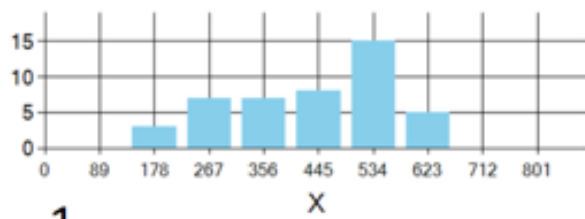
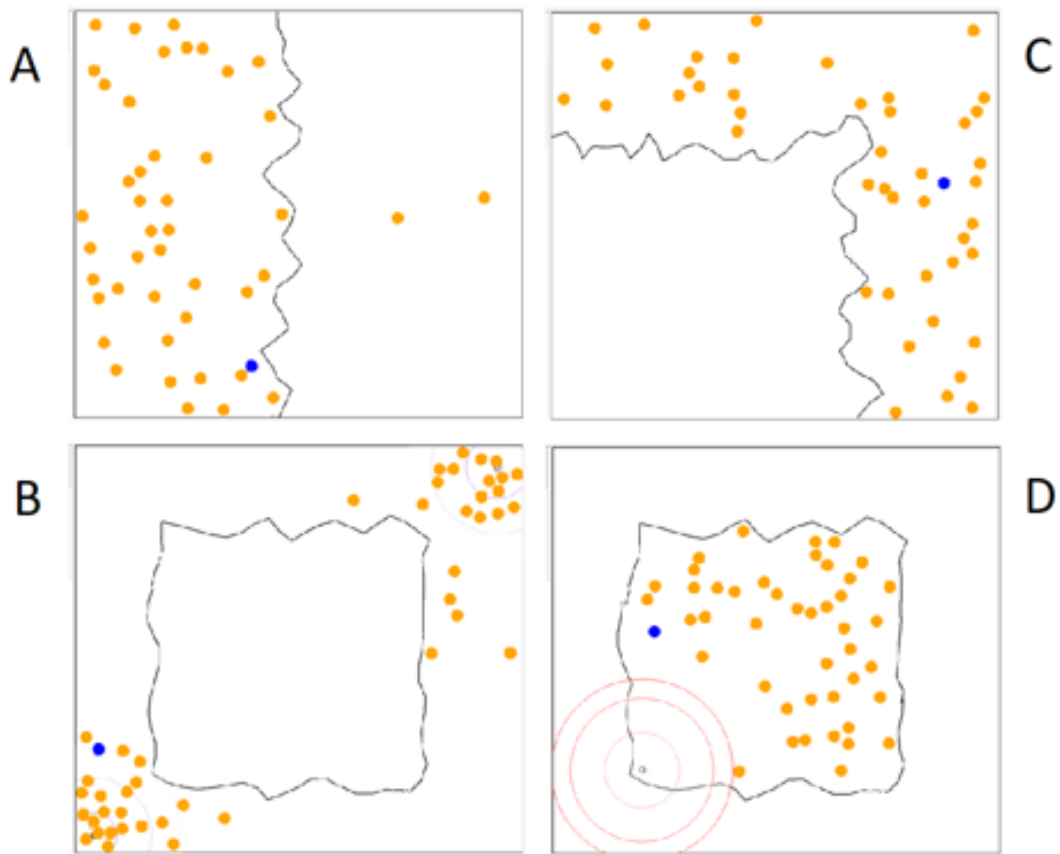
40. Описывает модуль скорости молекулы в 3D ...

4.12 Нарушения равномерности

Приведите примеры причин нарушения равномерного распределения некоторой физической величины. Сформулируйте условия, когда это распределение применимо, а когда — нет. Что происходит с энтропией при нарушении равномерности?

4.13 Деформации распределений

Изобразите с помощью человечков или стрелочек преобразования распределений вероятности, приводящие к увеличению (1) матожидания, (2) дисперсии, (3) энтропии, (4) коэффициента асимметрии.



4.14 Больцман

Частицы распределены в различных сосудах с центрами притяжения и отталкивания. Найдите соответствие состояний газа (A — D) и распределений координат (1 — 4)

4.15 Экспонента

Найдите матожидание и дисперсию случайной величины x , если плотность распределения вероятностей

$$w(x) = \frac{1}{\alpha} \exp\left(-\frac{x}{\alpha}\right).$$

4.16 Характеристическая функция равномерного

Докажите, что характеристическая функция распределения

$$w(\vartheta) = \frac{1}{b-a},$$

где $\vartheta \in [a, b]$, запишется как

$$C(\omega) = \frac{e^{ib\omega} - e^{ia\omega}}{it(b-a)}.$$

Получите из нее основные характеристики $m_1 = (a+b)/2$, $\sigma^2 = (b-a)^2/12$.

4.17 Характеристическая функция гаммы

Докажите, что для гамма-распределения характеристическая функция имеет вид

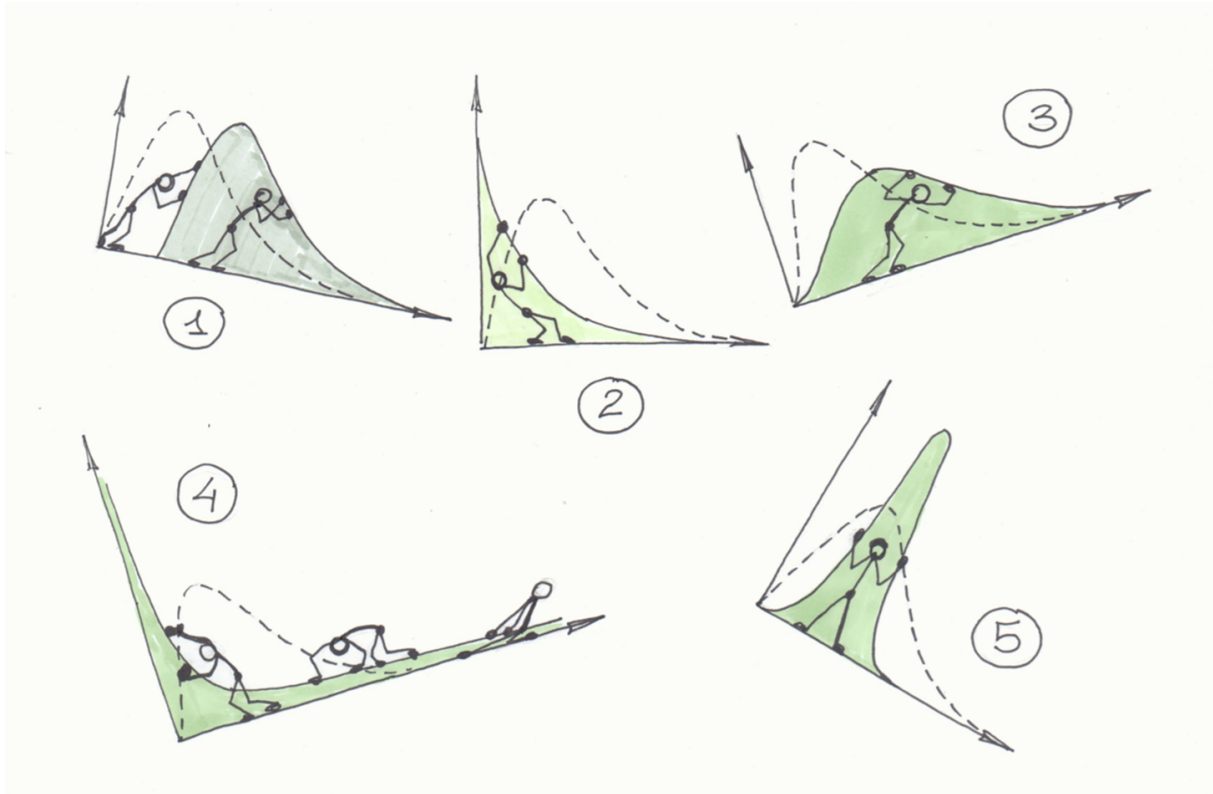
$$w(\vartheta) = \frac{(\vartheta)^{n-1}}{\Gamma(n)\alpha^n} \exp\left(-\frac{\vartheta}{\alpha}\right) \theta(\vartheta),$$

запишется так

$$C(\omega) = \frac{1}{(1 - i\omega\alpha)^n}.$$

Получите из нее основные характеристики $m_1 = n\alpha$, $\sigma^2 = n\alpha^2$.

4.18 Графики гаммы



Определите по графикам гамма-распределения, какие именно значения параметров меняют человечки. Запишите преобразования в виде формул

4.19 От гаммы к Гауссу

Докажите, что при больших значениях параметра формы гамма-распределение переходит в Гауссовское

4.20 Параметр формы для гаммы

Найдите, какой из двух наборов случайных чисел, подчиняющихся гамма-распределению, соответствует каждому из зна-

24.7239, 16.5736, 13.9181, 15.1628, 19.8502, 67.1222, 6.20402, 14.526, 0.355322, 26.6872
10.5936, 12.9766, 18.9567, 10.4726, 25.4534, 17.2219, 16.6359, 17.6235, 16.3121, 10.2125
n = 8, n = 2

40.6382, 58.7265, 33.3376, 27.2909, 47.4895, 29.3308, 43.0513, 46.694, 34.8811, 40.2882
59.2144, 50.9134, 10.9672, 42.054, 39.8776, 19.9214, 45.3327, 19.3038, 55.6088, 19.681
n = 3, n = 12

1.88224, 1.84154, 1.32018, 3.36359, 7.73071, 2.06166, 1.67549, 1.86606, 1.35964, 1.10917
0.382985, 0.839703, 0.824639, 1.62605, 10.4521, 7.43937, 1.48648, 1.84592, 9.19243, 3.6885
n = 3, n = 1



22.5824, 5.82732, 40.5358, 20.807, 19.8406, 3.76674, 30.3516, 4.10715, 34.2926, 43.9374
17.7188, 38.6256, 32.1479, 17.7449, 30.702, 13.5689, 18.4101, 24.8831, 27.6116, 10.8987
n = 2, n = 9

22.3856, 31.5146, 31.5587, 36.6446, 18.8704, 28.9269, 32.5295, 43.738, 28.5755, 36.9558
12.6632, 61.8375, 45.7677, 12.5399, 18.1252, 9.60382, 38.0762, 59.3489, 45.1574, 36.6951
n = 14, n = 2

68.6088, 24.7719, 22.6187, 54.9562, 29.6755, 57.7375, 48.4954, 32.9764, 60.4984, 48.673
79.9907, 47.3496, 47.4353, 34.3271, 60.0776, 34.4554, 28.6521, 28.8252, 50.3837, 43.5849
n = 15, n = 3

чений параметра формы. Параметр масштаба подобран так, чтобы матожидания были одинаковыми.

4.21 Сигма экспоненты

Докажите, что для экспоненциального распределения $\sigma_x^2 = \langle x \rangle^2$.

4.22 Длина свободного пробега

Рассмотрим последовательность событий во времени или в пространстве такую, что эти события совершенно не зависимы друг от друга. Например, столкновения частицы, движущейся в среде из других частиц. После каждого столкновения частица летит по прямой, и вероятность следующего столкновения в единицу времени никак не зависит от того, сколько она уже пролетела. Так же можно сказать, что вероятность столкновения на единицу пройденного пути p не зависит от длины этого пути. Тогда $p\Delta x$ — вероятность столкновения на некотором малом интервале Δx . Докажите, что распределение вероятностей для интервалов между соударениями будет экспоненциальным

$$w(x) = \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right),$$

4.23 Парадокс длины свободного пробега

Я лично давно уже убедилась, что как бы ни были нелепы написанные мною выдумки, жизнь, если захочет, напишет куда нелепее!

Н. Тэффи

Объясните, почему результат предыдущей задачи оказывается контринтуитивным, если наблюдать за блужданием молекулы идеального газа. На рисунке показана траектория



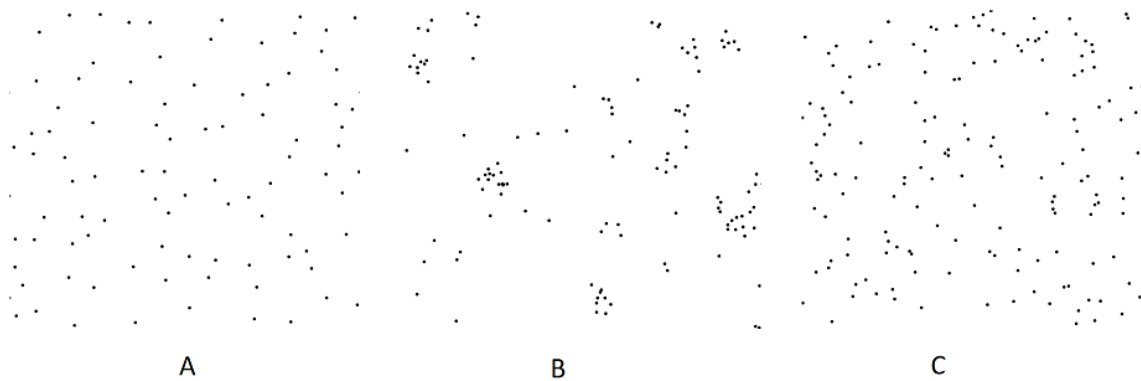
частицы, из которой не очень видна монотонная закономерность: чем короче пробег, тем он вероятней. Кроме того, случайная траектория может иметь любые очертания, например, напоминать отдыхающего Пушкина.

4.24 Дифференциальная энтропия

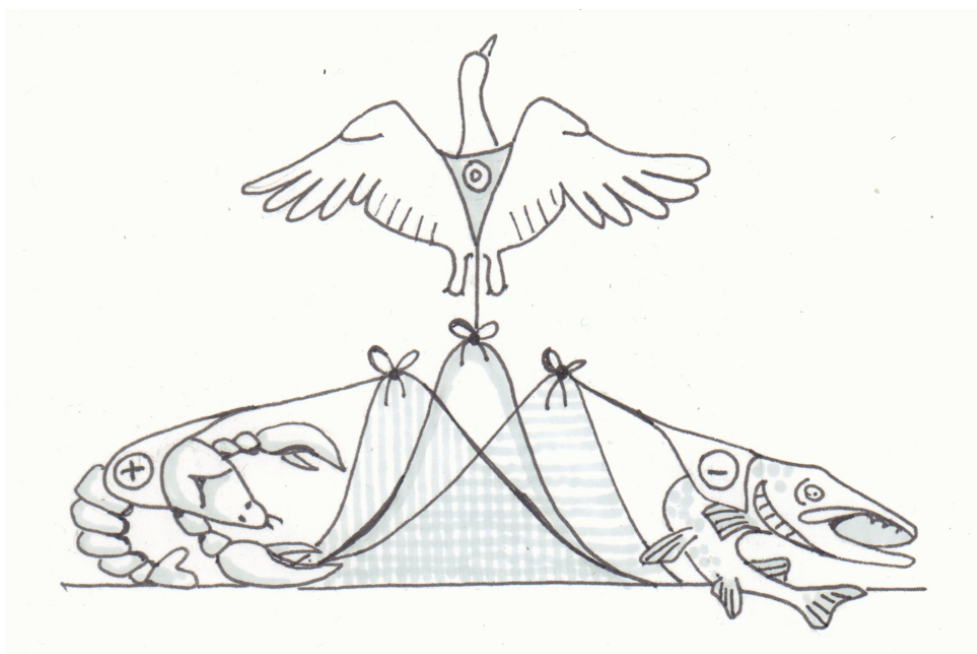
Вычислите дифференциальную энтропию $-\langle \ln w(x) \rangle$ одного из распределений: экспоненциальное, нормальное (Гаусса), равномерное, Лапласа. Проверьте, как связаны энтропия и дисперсия для этого распределения.

4.25 Расстояния между точками

Учитывая результат задач **Длина свободного пробега** и **Норм норма** изобразите схематично распределение расстояний между независимыми соседними точками для двухмерной структуры. Затем так же схематично покажите, как изменится это распределение в случае притяжения и отталкивания точек. Подберите соответствующую структуру (А — С)



4.26 Асимметрия и эксцесс

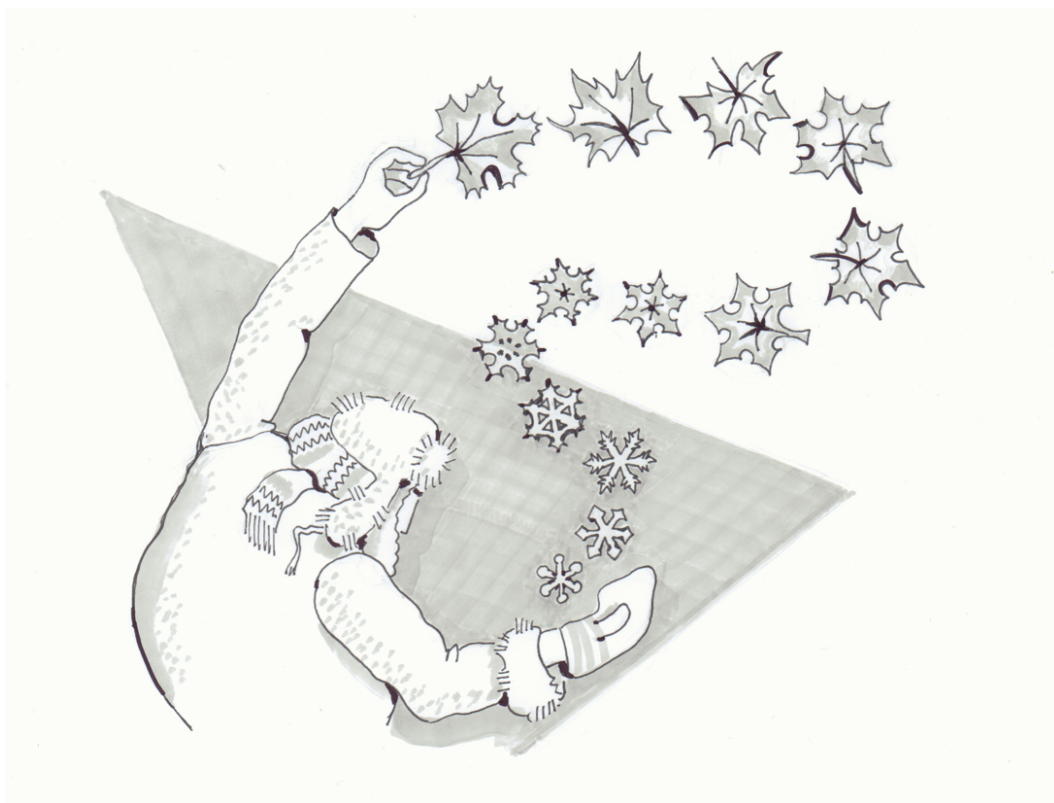


Вычислите для гамма-распределения коэффициенты асимметрии или эксцесса и покажите, что они уменьшаются при росте параметра порядка k

$$w(x) = Cx^{k-1} \exp\left(-\frac{x}{\alpha}\right).$$

Проверьте, что результат соответствует общему правилу, что при положительном коэффициенте асимметрии левый склон графика круче чем правый.

4.27 Зависящие от температуры



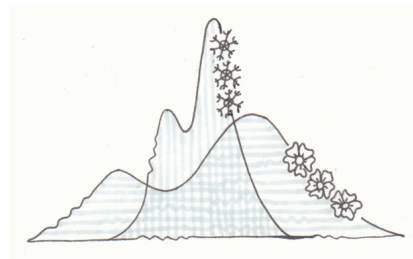
Тары-бары растабары,
Изотермы, изобары!

Т. Кибиров

Из всех физических случайных величин, упомянутых в этом разделе найдите те, чье распределение зависит от температуры. Ответ может выглядеть как: номер задачи, номер пункта в задаче.

4.28 Температура и дисперсия

Из всех величин из предыдущей задачи можно ли найти такую, у которой дисперсия уменьшается с температурой? Можно ли сформулировать некоторую общую закономерность по этому поводу и указать границы ее применимости?



4.29 Исправления Гаусса

Найдите 4 опечатки в формулах решения задачи. Выпишите те формулы, в которых есть ошибка.

Докажите, что распределение Гаусса является бесконечно делимым распределением. Найдите матожидание и дисперсию суммы двух величин, распределенных по Гауссу.

Бесконечно делимое распределение в теории вероятностей — распределение случайной величины такой, что она может быть представлена в виде произвольного количества независимых, одинаково распределенных слагаемых.

Докажем, что сумма двух независимых случайных величин $x = x_1 + x_2$, распределенных по Гауссу с матожиданиями m_1 и m_2 и дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 , тоже будет распределена по Гауссу. Есть два способа решения этой задачи. Можно вычислить свертку из распределений этих величин

$$w(x) = \int_0^\infty w(x_1) w(x - x_1) dx_1 = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left(-\frac{(x_1 - m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp\left(-\frac{(x - x_1 - m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right) dx_1.$$

Мы видим, что этот способ оказывается громоздким, поэтому следует применить свойство характеристической функции суммы независимых величин.

$$C_x(u) = C_{x_1}(u)C_{x_2}(u).$$

Характеристические функции обеих величин имеют вид

$$C_{x_1}(u) = \exp\left(ium_1 + \frac{u^2\sigma_1^2}{2}\right), \quad C_{x_2}(u) = \exp\left(ium_2 + \frac{u^2\sigma_2^2}{2}\right).$$

Получаем характеристическую функцию суммы

$$C_x(u) = \exp\left(iu(m_1 + m_2) - \frac{u^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{2}\right),$$

которая имеет вид характеристической функции гауссовского распределения с матожиданием $m_1 + m_2$ и дисперсией $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Этот результат можно обобщить на случай суммы n независимых одинаково распределенных величин. Матожидание и дисперсия суммы будут в n раз больше, чем матожидание и дисперсия этих величин.

4.30 Исправления гаммы

Найдите 3 опечатки в формулах решения задачи. Выпишите те формулы, в которых есть ошибка.

Докажите, что гамма-распределение является бесконечно делимым распределением. Найдите матожидание и дисперсию суммы двух таких величин.

Бесконечно делимое распределение в теории вероятностей — распределение случайной величины такой, что она может быть представлена в виде произвольного количества независимых, одинаково распределенных слагаемых.

Докажем, что сумма двух независимых случайных величин $x = x_1 + x_2$, распределенных с гамма-распределениями, с параметрами формы n_1 и n_2 и одинаковым параметром масштаба α , тоже будет описываться гамма-распределением. Тогда их матожидания $m_1 = \alpha n_1$ и $m_2 = \alpha n_2$ и дисперсии $\sigma_1^2 = \alpha n_1^2$ и $\sigma_2^2 = \alpha n_2^2$. Есть два способа решения этой задачи. Можно вычислить свертку из распределений этих величин

$$w(x) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x_1) w(x - x_1) dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_1^{n_1-1}}{\Gamma(n_1)\alpha^{n_1}} \exp\left(-\frac{x_1}{\alpha}\right) \frac{(x - x_1)^{n_2-1}}{\Gamma(n_2)\alpha^{n_2}} \exp\left(-\frac{x - x_1}{\alpha}\right) dx_1.$$

Мы видим, что этот способ оказывается громоздким, поэтому следует применить свойство характеристической функции суммы независимых величин.

$$C_x(u) = C_{x_1}(u)C_{x_2}(u).$$

Характеристические функции обеих величин имеют вид

$$C_{x_1}(u) = \frac{1}{(1 - iu\alpha)^{n_1}}, \quad C_{x_2}(u) = \frac{1}{(1 - iu\alpha)^{n_2}}.$$

Получаем характеристическую функцию суммы

$$C_x(u) = \frac{1}{(1 - iu\alpha)^{n_1+n_2}},$$

которая имеет вид характеристической функции гауссовского распределения с матожиданием $\alpha(n_1 + n_2)$ и дисперсией $\alpha^2(n_1 + n_2)$. Этот результат можно обобщить на случай суммы m независимых одинаково распределенных величин. Матожидание и дисперсия суммы будут в m раз больше, чем матожидание и дисперсия этих величин.

4.31 Исправления относительной скорости

Найдите две опечатки в формулах решения задачи. Выпишите те формулы, в которых есть ошибка.

Найдите распределение модуля относительной скорости двумерного движения двух частиц.

При решении задач, в которых есть возможность воспользоваться свойствами распределений, упрощающими решение, будем ими пользоваться. Например, здесь используем то, что сумма величин, распределенных по Гауссу, тоже распределена по Гауссу с матожиданием $m_1 + m_2$ и дисперсией $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Получаем, что проекция на ось ОХ относительной скорости $v_x = v_{2x} - v_{1x}$ будет распределена с Гауссовским распределением с нулевым средним и двойной дисперсией $\sigma^2 = 2\sigma_1^2 = 2kT/m$

$$w(v_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{v_x^2}{\sigma^2}\right).$$

То же самое будет и для проекции на ось ОУ. Совместное распределение принимает вид

$$w(v_x, v_y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{v_x^2 + v_y^2}{2\sigma^2}\right).$$

Переходим к полярным координатам в пространстве скоростей

$$w(v, \phi) = w(v_x, v_y) = \frac{v}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right).$$

Интегрируя по не интересующим нас углам, получаем распределение Релея.

$$w(v) = \frac{v}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right).$$

Мы видим, что плотность распределения вероятностей соответствует большей дисперсии и большему матожиданию для относительной скорости, чем для просто скорости молекулы, потому что эта величина имеет больший разброс значений.

4.32 Экспонента

Из приведенных далее случайных величин только одна НЕ описывается экспоненциальным распределением. Найдите ее

- 1) Длина свободного пробега
- 2) Кинетическая энергия молекулы идеального газа при 1D движении
- 3) Потенциальная энергия молекулы в симметричном центральном параболическом поле в 2D пространстве
- 4) Потенциальная энергия молекулы в поле силы тяжести
- 5) Время свободного пробега
- 6) Кинетическая энергия молекулы идеального газа при 2D движении

- 7) Потенциальная энергия молекулы в симметричном центральном поле с кубической зависимостью от радиуса в 3D пространстве
- 8) Вертикальная координата молекулы в поле силы тяжести
- 9) Расстояние от бесконечной положительно заряженной пластины для электронов, находящихся с одной стороны от нее, при условии возможности пренебречь их взаимодействием друг с другом
- 10) Потенциальная энергия электронов рядом с бесконечной положительно заряженной пластиной, находящихся с одной стороны от нее, при условии возможности пренебречь их взаимодействием друг с другом

5 Распределение суммы случайных величин

Кто был самый глупый человек? Афинянин
Кикилион, который сидел на берегу моря
и пытался пересчитать все морские волны.

М.Гаспаров "Занимательная Греция"

5.1 Два кубика

Найдите распределение вероятностей для суммы на двух кубиках.

5.2 От Бернулли к Пуассону

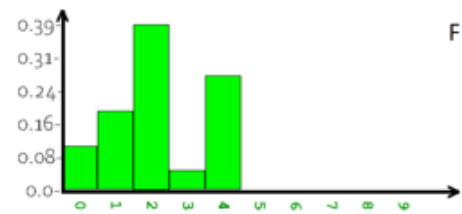
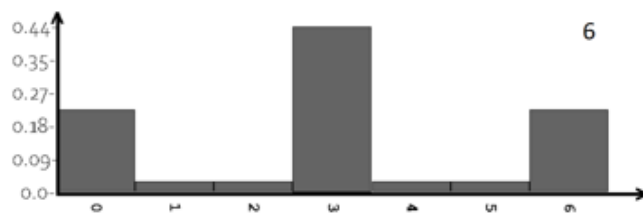
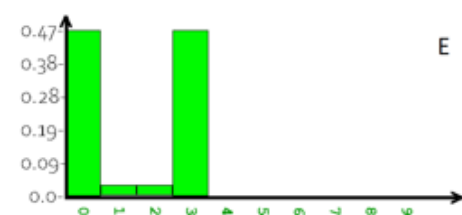
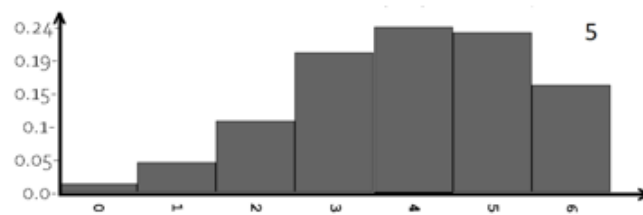
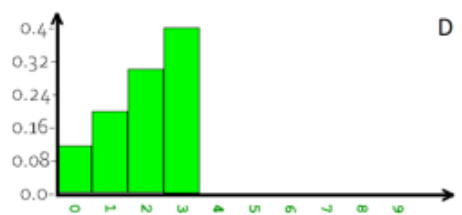
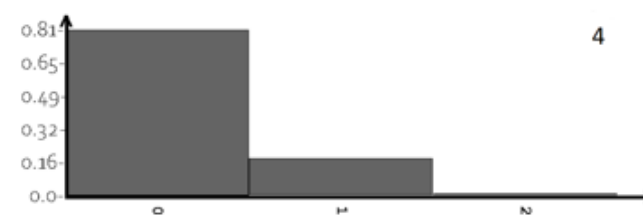
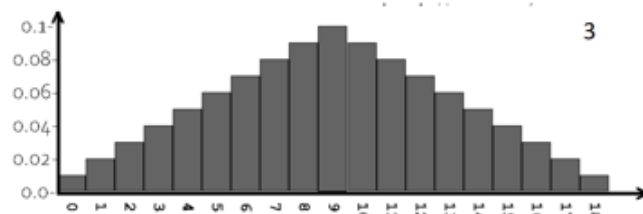
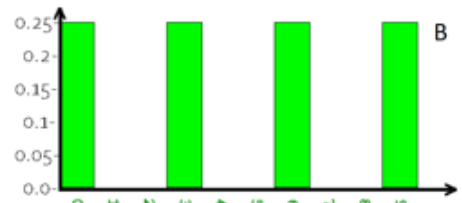
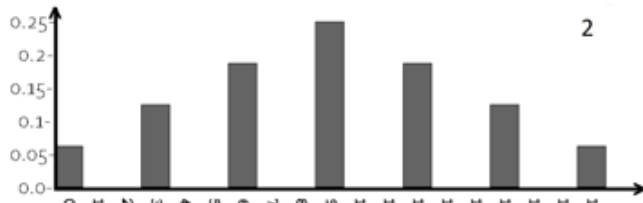
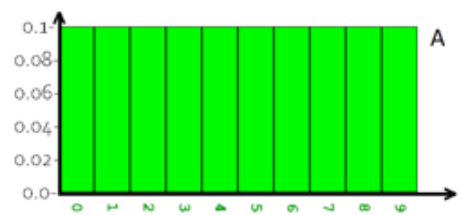
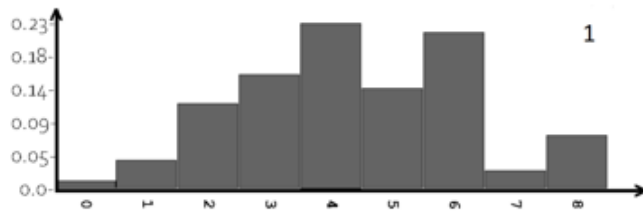
Докажите, что распределение Пуассона описывает сумму независимых величин, распределенных с распределением Бернулли. Какие для этого должны выполняться условия? Будут ли дисперсия и среднее Пуассона суммой соответствующих параметров для Бернулли?

5.3 Сумма равномерных

Найдите распределение вероятностей для суммы двух независимых, одинаково непрерывно и равномерно распределенных величин.

5.4 Расстояние

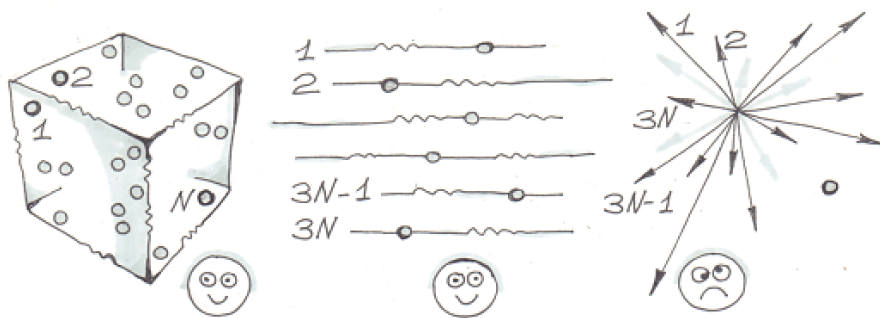
Примените результат предыдущей задачи для того, чтобы найти проекцию на ось расстояния между молекулами в сосуде



5.5 Сумма двух

На рисунке в левом столбце (1 — 6) показаны распределения вероятностей для суммы двух случайных величин, а в правом (А — F) показаны гистограммы самих этих величин. Найдите соответствия.

5.6 Хи-квадрат как кинетическая энергия



Докажите, что распределение хи-квадрат описывает суммарную кинетическую энергию молекулы идеального газа в n -мерном пространстве. При этом нам не важно, описывает ли эта модель одну частицу в таком пространстве или $N = n/3$ частиц в трехмерном пространстве или n одномерных частиц. Математическое описание будет одним и тем же, но две последние модели проще представить.

5.7 Сумма нормальных

Найдите дисперсию случайной величины $x + y$, если плотности распределения вероятностей у них одинаковые и нормальные

5.8 Сумма гамм

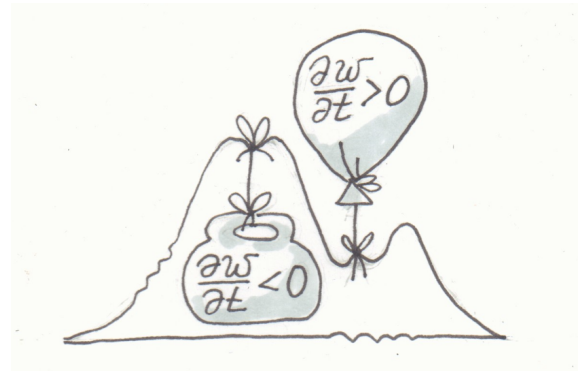
Найдите распределение вероятностей для суммы двух независимых величин, одинаково распределенных с гамма-распределением.

5.9 Сумма экспонент

Докажите, что характеристическая функция гамма-распределения с параметром формы n является возведенной в n -ю степень характеристической функцией экспоненциального распределения с тем же параметром масштаба. О чем это свидетельствует с точки зрения суммирования независимых случайных величин?

5.10 Суммирование как сглаживание

Можно наблюдать, что распределение для суммы случайных величин выглядит все более гладким, чем больше величин мы складываем. Это соответствует тому, что минимумы поднимаются, а максимумы опускаются. Математически такой процесс описывается уравнением диффузии. Проверьте путем дифференцирования по времени и по координате распределения Гаусса с растущей дисперсией



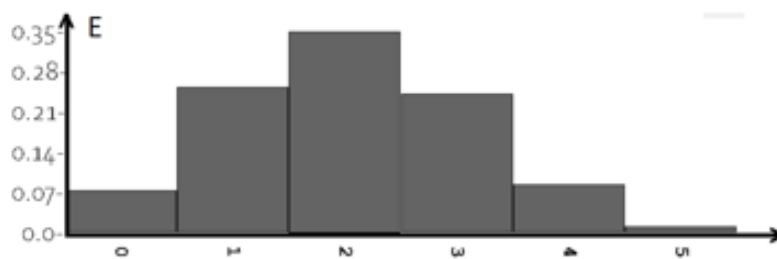
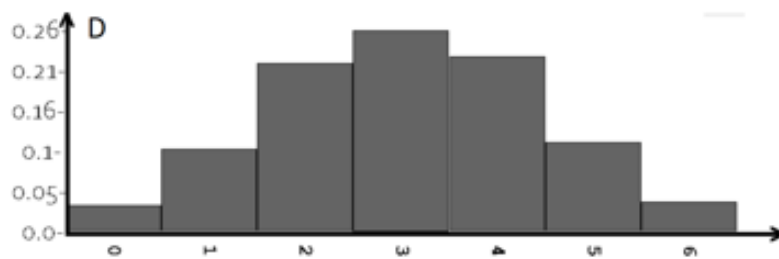
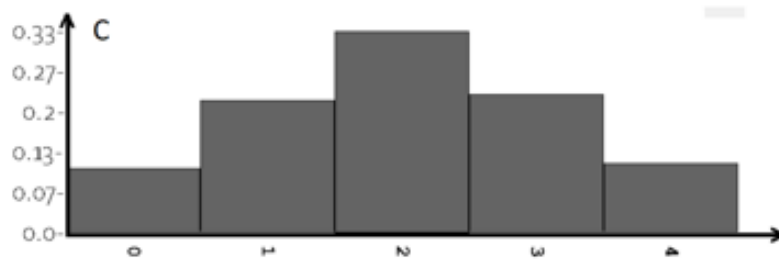
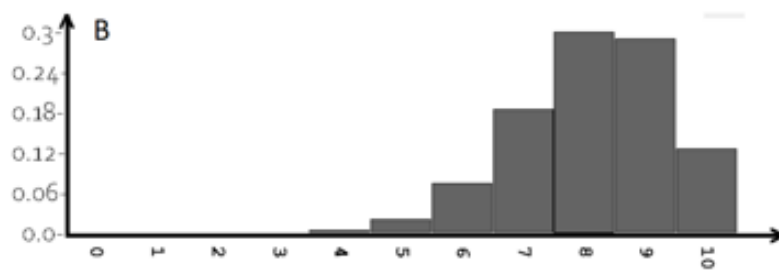
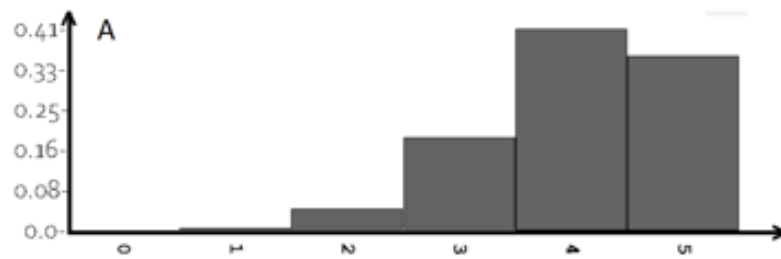
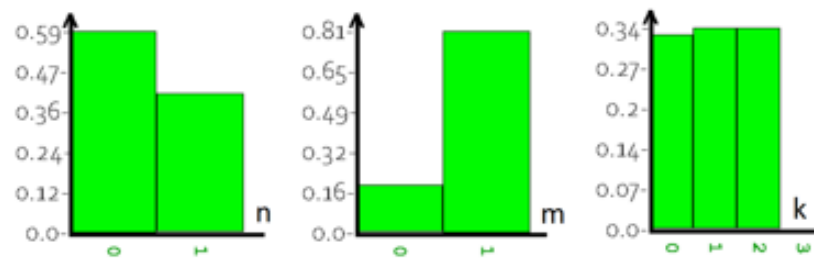
$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 2D_x t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_x t}\right), \quad (20)$$

что оно является решением уравнения диффузии

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x, t). \quad (21)$$

5.11 Сумма дискретных

В эксперименте складываются одинаковые случайные величины. На гистограммах изображены исходные распределения и суммы нескольких величин. Найдите соответствие сумм и слагаемых.



6 Экзотические распределения физических величин

-- Я думал, ты умер... -- вырвалось у него.

-- Одно время я так тоже думал, -- подхватил Форд, -- а потом на пару недель решил, что я -- лимон. Ужасно повеселился -- все две недели только и знал, что бултыхался в джин с тоником.

Артур откашлялся. А потом откашлялся еще раз.

-- Где же ты...

-- Отыскал джин с тоником? -- радостно продолжил за него Форд. -- Я отыскал озерцо, которое думало, что оно джин с тоником, и стал в нем бултыхаться. По крайней мере, я думаю, что оно думало, что оно джин с тоником... Есть вероятность, -- добавил он с ухмылкой, от которой самые хладнокровные люди с воем полезли бы на деревья, -- что мне это всего лишь примерещилось.

Дуглас Адамс. Жизнь, Вселенная и все остальное

6.1 Симметричная экспонента

Найдите дисперсию случайной величины x , если плотность распределения вероятностей

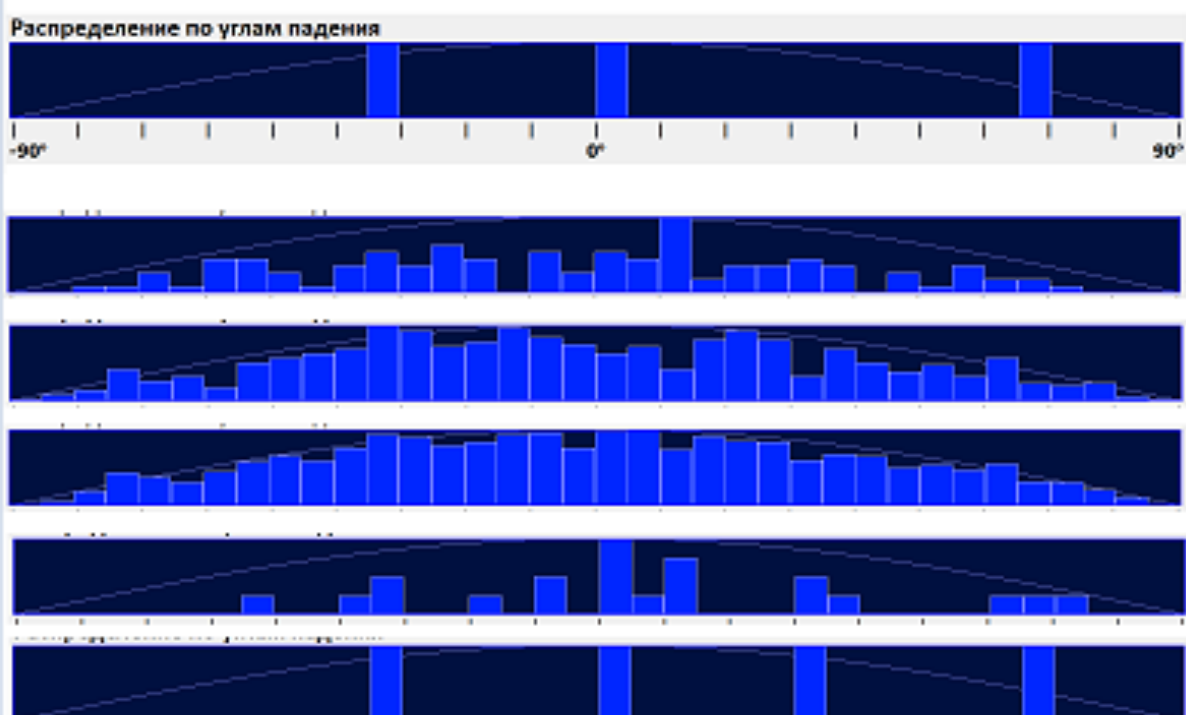
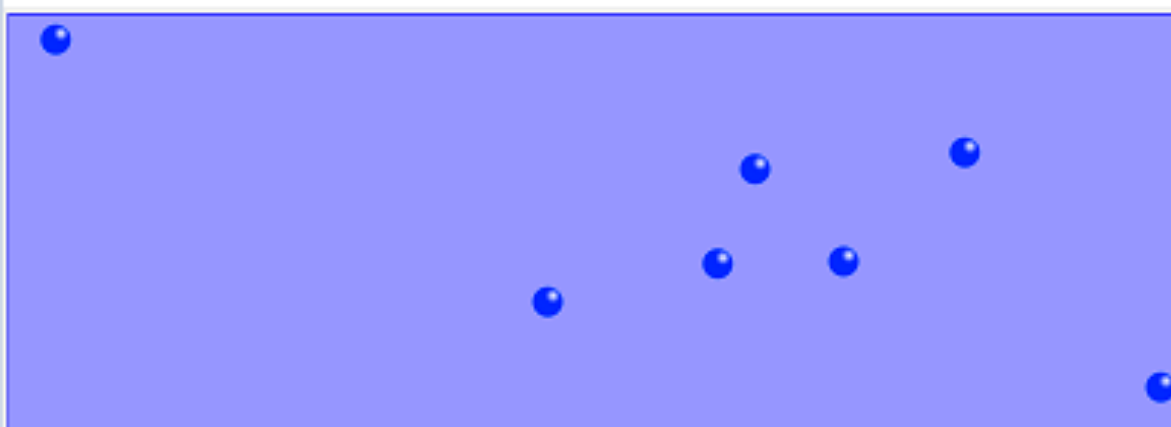
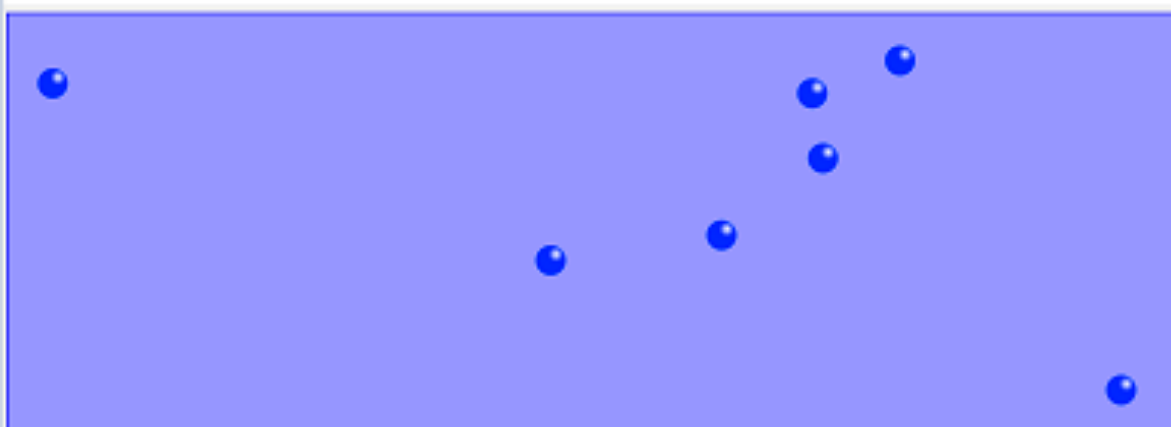
$$w(x) = \frac{1}{\alpha} \exp\left(-\frac{|x|}{\alpha}\right).$$

6.2 Распределение по косинусу

Получите необходимые характеристики для распределения по косинусу, чтобы можно было создать страницу в Википедии

6.3 Соударение со стенкой

В эксперименте измеряется угол столкновения с нижней стенкой. Данные собираются добавлением высоты в столбик гистограммы, соответствующий диапазону углов. Столбики нормированы на самый высокий. Расположите гистограммы в хронологическом порядке. Сравните первую и вторую гисто-



граммы. Удар какой именно частицы появился на второй гистограмме? Почему столбик появился именно здесь?

6.4 Проекция стукнутых

Частицы в сосуде движутся хаотически с одинаковой постоянной по модулю скоростью v и соударяются со стенками. Запишите плотность распределения вероятностей для проекций скоростей ударяющихся о стенку частиц, параллельных стенке сосуда.

6.5 хи-квадрат

Найдите математическое ожидание или дисперсию для случайной величины, распределенной по хи-квадрат, не зная константу нормировки, но сводя к виду нормировки интеграл

$$w(x) = Cx^{\frac{k}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right).$$

6.6 Молекула в многомерном пространстве

Докажите, что распределение вероятностей для кинетической энергии молекулы идеального газа в k —мерном пространстве описывается распределением хи-квадрат с показателем формы k

6.7 Возведение в степень нормального

Найдите распределение вероятностей для величины $y = x^n$, если x распределена по нормальному закону

6.8 Логарифм от нормального

Найдите распределение вероятностей для величины $y = \log x$, если x распределена по нормальному закону

6.9 Парето

Это распределение знаменито своими тяжелыми хвостами

$$w(\vartheta) = \frac{n\vartheta_0^n}{\vartheta^{n+1}} \theta(\vartheta - \vartheta_0).$$

Докажите, что

$$m_1 = \frac{n\vartheta_0}{n-1}, \quad \sigma^2 = \left(\frac{\vartheta_0}{n-1}\right)^2 \frac{n}{n-2}.$$

6.10 Вейбул из экспоненты

Докажите, что это распределение получается из экспоненциального заменой $x = [(\vartheta - \vartheta_0)/\alpha]^n$

$$w(\vartheta) = \frac{n}{\alpha} \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0}{\alpha}\right)^{n-1} \exp\left(-\left[\frac{\vartheta - \vartheta_0}{\alpha}\right]^n\right) \theta(\vartheta - \vartheta_0).$$

6.11 Вейбул

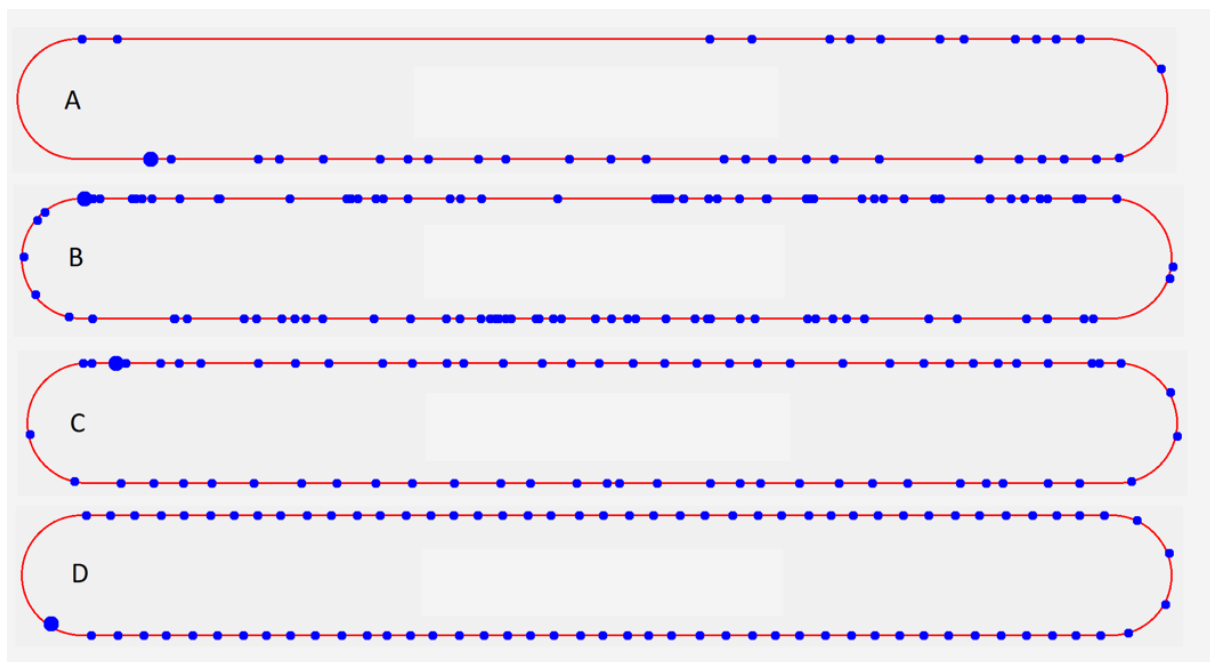
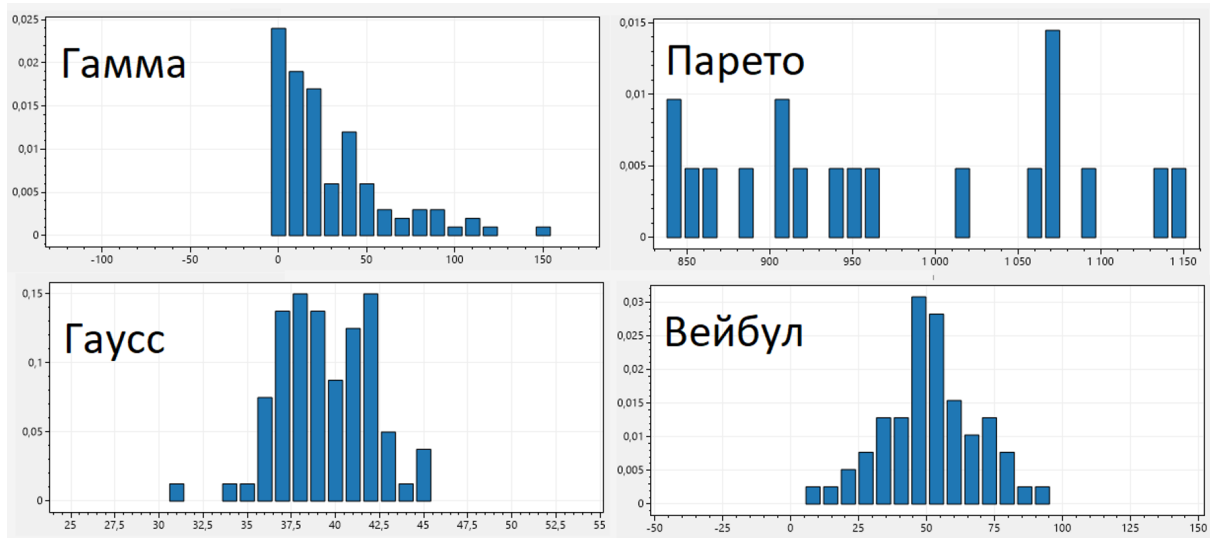
Докажите, что основные характеристики распределения Вейбула

$$m_1 = \alpha \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \vartheta_0, \quad \sigma^2 = \alpha^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{n}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right].$$

6.12 Бусы Бохо

На всякие нужды! на всякие вкусы!
Для мальчиков -- пули, для девочек -- бусы.
На всякие жажды! на всякие масти!
Для мальчиков -- игры, для девочек -- страсти.
М. Цветаева

На рисунке представлены последовательности точек в виде бус. Расстояния между ними распределены с разными распределениями непрерывных величин. Экспериментальные гистограммы представлены на рисунке. Определите, какие бусы (A-D) им соответствуют. Приблизительно оцените значения параметров соответствующих распределений.



6.13 Стьюдент

Найдите дисперсию распределения Стьюдента, не зная константу нормировки, но сводя к виду нормировки интеграл, при большом значении параметра формы

$$w(x) = C \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

6.14 Исправления косинуса

Найдите 4 опечатки в формулах решения задачи. Выпишите те формулы, в которых есть ошибка и подчеркните исправленный фрагмент.

Найдите характеристическую функцию величины, распределенной по косинусу, и ее моменты.

Распределение по косинусу выглядит следующим образом

$$w(x) = \frac{1}{2} \cos(x - m_1) \theta\left(x - m_1 + \frac{\pi}{2}\right) \theta\left(x + m_1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

Запишем характеристическую функцию, представив косинус через экспоненты мнимого аргумента

$$C(u) = \langle e^{iux} \rangle = \frac{1}{4} \int_{m_1 - \frac{\pi}{2}}^{m_1 + \frac{\pi}{2}} \left(e^{i(m_1 - x)} + e^{-i(m_1 - x)} \right) e^{iux} dx.$$

Заменяя переменную $y = m_1 - x$, получаем

$$C(u) = \frac{e^{ium_1}}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left(e^{iy} + e^{-iy} \right) e^{-iuy} dy.$$

После интегрирования возвращаемся к тригонометрическим функциям

$$C(u) = \frac{e^{ium_1}}{2} \left(\frac{e^{i(1-u)\frac{\pi}{2}} - e^{-i(1-u)\frac{\pi}{2}}}{1-u} - \frac{e^{i(1+u)\frac{\pi}{2}} - e^{-i(1+u)\frac{\pi}{2}}}{1+u} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{ium_1}}{2} \left(\frac{\sin(1-u)\frac{\pi}{2}}{1-u} - \frac{\sin(1+u)\frac{\pi}{2}}{1+u} \right) = \frac{e^{ium_1}}{2} \left(\frac{\cos u\frac{\pi}{2}}{1-u} + \frac{\cos u\frac{\pi}{2}}{1+u} \right) \\
&= \frac{e^{ium_1} \cos u\frac{\pi}{2}}{1-u^2}
\end{aligned}$$

Характеристическая функция распределения, сдвинутого на m_1 , домножается на e^{ium_1} . Без этого сдвига фурье-образ четной функции был бы вещественным. Найдем первые моменты из общей формулы для моментов

$$m_n = i^{-n} \left. \frac{d^n}{du^n} C(u) \right|_{u=0}.$$

Первый момент

$$\langle x \rangle = \frac{1}{i} C(u) \left(im_1 - \frac{\pi \sin u\frac{\pi}{2}}{2 \cos u\frac{\pi}{2}} + \frac{2u}{(1-u^2)^2} \right) \Big|_{u=0} = m_1.$$

Второй момент

$$\begin{aligned}
\langle x^2 \rangle &= \frac{1}{i^2} C(u) \left(im_1 - \frac{\pi \sin u\frac{\pi}{2}}{2 \cos u\frac{\pi}{2}} + \frac{2u}{(1-u^2)^2} \right)^2 \Big|_{u=0} + \\
&+ \frac{1}{i^2} C(u) \left(-\frac{\pi^2}{4 \cos^2 u\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{(1-u^2)^2} + \frac{8u^2}{(1-u^2)^4} \right) \Big|_{u=0} = \\
&= m_1^2 + \frac{\pi^2}{4} - 2.
\end{aligned}$$

Дисперсия будет

$$\sigma_x^2 = \frac{\pi^2}{4} - 2 = 0.47.$$

Интересно сравнить эту дисперсию с дисперсией углов частицы в двухмерном сосуде. В этом случае распределение будет равномерным и его дисперсия

$$\sigma_{2\pi}^2 = \pi^2/3 = 3.29$$

много больше дисперсии углов частицы, которая ударила в стенку. Мы получили дополнительную информацию об этой

частице, поэтому условное распределение по углам при условии, что произошел удар, гораздо уже. Можно провести аналогию между этим явлением и квантовым измерением.

6.15 Сдвинутый косинус

Докажите, что характеристическая функция распределения

$$w(\vartheta) = \frac{\pi}{4\alpha} \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}(\vartheta - \mu)\right),$$

где $\mu - \alpha \leq \vartheta \leq \mu + \alpha$, как и для любого симметричного распределения, запишется как

$$C(\omega) = e^{i\mu\omega} A(\omega),$$

где A — вещественная функция. И для данного распределения она имеет вид

$$A(\omega) = \frac{\pi^2 \cos \alpha\omega}{\alpha\omega(\pi^2 - 4\alpha^2\omega^2)}.$$

Докажите, что основные характеристики $m_1 = \mu$, $\sigma^2 = \alpha^2 \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right)$.

6.16 Косинус на пьедестале

Докажите, что характеристическая функция распределения

$$w(\vartheta) = \frac{1}{2\alpha} \left[1 + \cos\left(\frac{\vartheta - \mu}{\alpha}\pi\right) \right],$$

где $\vartheta \in [\mu - \alpha, \mu + \alpha]$, запишется как

$$C(\omega) = e^{i\mu\omega} A(\omega),$$

где A — вещественная функция

$$A(\omega) = \frac{\pi^2 \sin \alpha\omega}{\alpha\omega(\pi^2 - \alpha^2\omega^2)}.$$

Докажите, что основные характеристики $m_1 = \mu$, $\sigma^2 = \alpha^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2}\right)$.

7 Решения уравнения Фоккера-Планка

Милый друг, иль ты не слышишь,
Что житейский шум трескучий --
Только отклик искаженный
Торжествующих созвучий?

В. Соловьев

7.1 Стохастические дифференциальные уравнения

Уравнения вида

$$\dot{x} + a(x) = b(x)\xi(t) \quad (22)$$

называются стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ). Здесь функция $a(x)$ описывает детерминированную динамику системы. Для учета случайных воздействий в уравнение добавляется шум, а именно, $\xi(t)$ — дельта-коррелированный случайный процесс $\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = 2D\delta(\tau)$. Это означает, что время корреляции равно нулю, а константа D характеризует интенсивность шума. Кроме того, этот процесс характеризуется нулевым средним $\langle \xi(t) \rangle = 0$. Функция $b(x)$ описывает зависимость влияния шума на систему от состояния самой системы. Учитывая, что стационарное распределение выражается следующим образом

$$w_{st}(x) = \frac{C}{|b(x)|} \exp \left[-\frac{1}{D} \int^x \frac{a(x')}{b^2(x')} dx' \right],$$

где C — константа нормировки, получите стационарное распределение для уравнений

1

$$\dot{x} = -\alpha x + \frac{1}{x} \xi(t), \quad (23)$$

где $\alpha = \text{const}$ и $x > 0$.

2

$$\dot{x} = -\alpha x + \sqrt{x} \xi(t), \quad (24)$$

где $\alpha = \text{const}$ и $x > 0$.

3

$$\dot{x} = -\alpha x \ln \frac{x}{x_0} + \alpha x \xi(t), \quad (25)$$

где $\alpha = \text{const}$, $x_0 = \text{const}$, и $x > 0$.

4

$$\dot{x} = -\frac{\alpha}{x} x + \frac{\alpha}{x} \xi(t), \quad (26)$$

где $\alpha = \text{const}$ и $x > 0$.

7.2 Гаусс

Докажите, что стационарным решением уравнения Фоккера-Планка для проекции скорости броуновской частицы будет распределение Гаусса.

7.3 Сухое трение

Докажите, что стационарным решением уравнения Фоккера-Планка для проекции скорости броуновской частицы с сухим трением будет распределение Лапласа (двойное экспоненциальное).

7.4 Максвелл

Докажите, что стационарным решением уравнения Фоккера-Планка для скорости броуновской частицы будет распределение Максвелла.

7.5 Больцман

Докажите, что стационарным решением уравнения Фоккера-Планка для координаты броуновской частицы с малой массой, находящейся в поле потенциальной силы, будет распределение Больцмана.

7.6 Хаотическое блуждание

Глаза имеешь -- прячь их!
Опасно зрячим быть.
Незрячие незрячих
ведут глазастых бить.

К. Гадаев

Докажите, что для броуновской частицы, совершающей одномерное движение, уравнение Фоккера-Планка превращается в уравнение диффузии.

7.7 Броуновские частицы

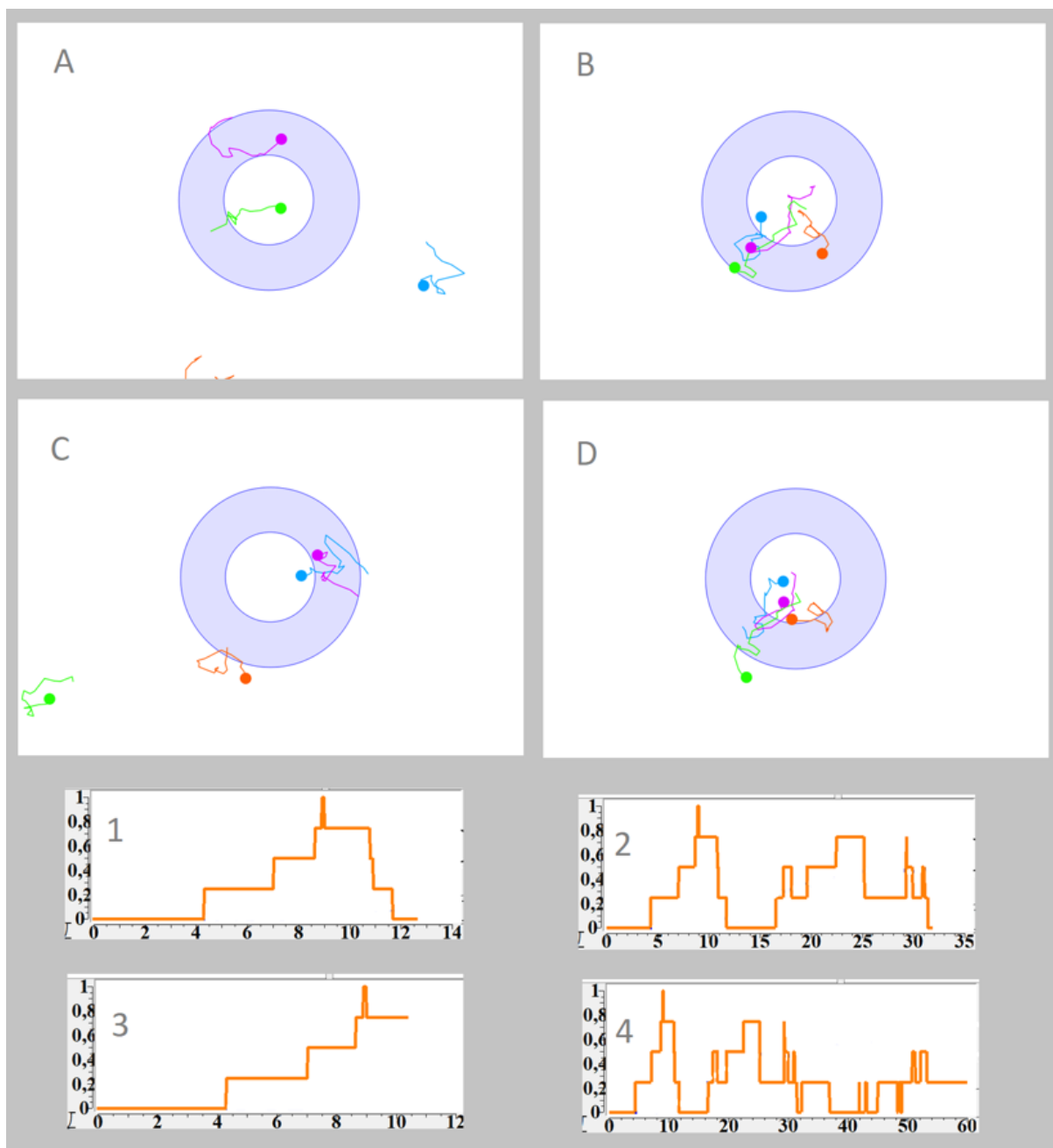
На рисунке 4 броуновские частицы начинают движение из центра круга. Графики (1 — 4) отражают число частиц в выделенном кольце в зависимости от времени и сделаны в разные моменты времени. Расположите их в порядке возрастания времени измерения и подберите к ним соответствующие снимки процесса (А — D).

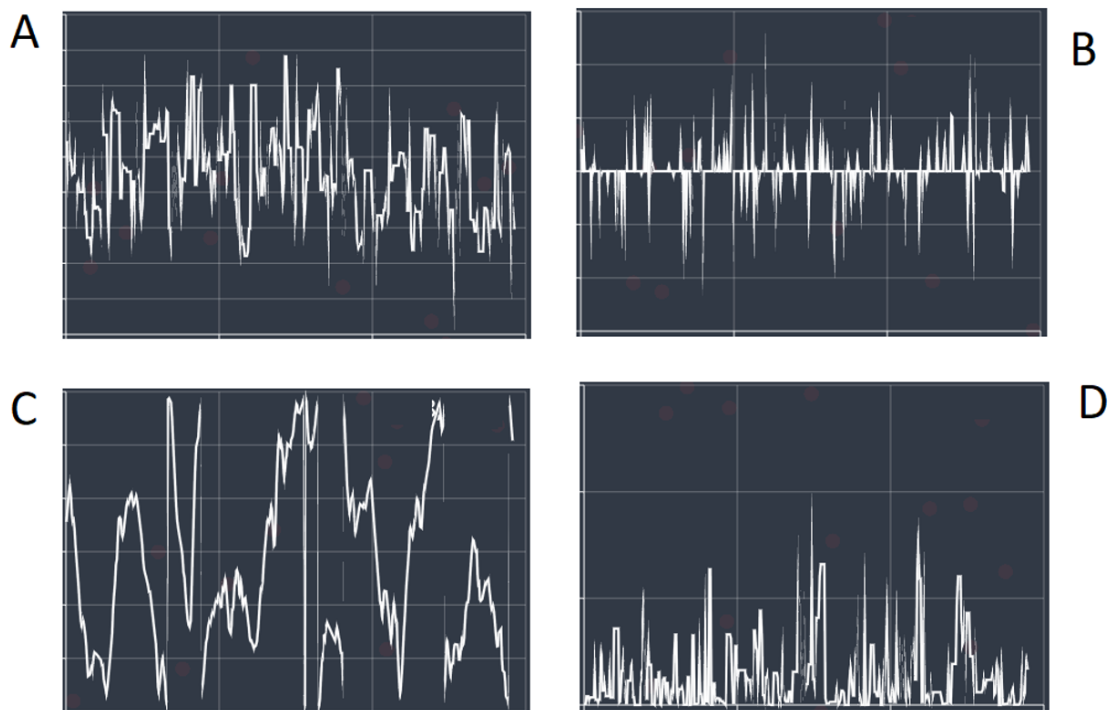
7.8 Вращающаяся броуновская частица

Жил премудрый политик в Сеуле.
Но когда его перевернули
И стали крутить,
"Прошу прекратить", --
Заявил он коллегам в Сеуле
Э.Лир (пер. Г.Кружков)

На рисунке показаны временные зависимости угла поворота, угловой скорости, углового ускорения и кинетической энергии вращающейся броуновской частицы. Определите, какой из графиков что описывает.







7.9 Вращающаяся и Поступательная

Как изменятся графики зависимости скорости и кинетической энергии от времени для броуновских частиц (БЧ) : вращающейся и движущейся поступательно в рассмотренных демонстрациях, если

- 1 увеличить массу БЧ?
- 2 увеличить скорость движения частиц среды?
- 3 уменьшить количество частиц среды?

7.10 Вращающаяся против Поступательной

И когда иногда, вдохновеньем бурля,
Он кричал: 'Заворачивай носом!
Носом влево, а корпусом -- право руля!' --
Что прикажете делать матросам?
Л. Кэрролл (пер. Г.Кружков)

Напишите небольшой диалог между двумя броуновскими частицами: вращающейся и движущейся поступательно. Отрадите в нем статистические закономерности процессов.

8 Основные термины

Вероятность Probability — числовая характеристика степени возможности появления какого-либо события в определенных условиях, которые могут повторяться неограниченное количество раз

Дельта-функция Delta function — обобщенная функция, которая равна нулю всюду, кроме нуля, и интеграл от которой по всей числовой оси равен единице

Кумулянты Cumulants — числовые характеристики случайной величины обладающие свойством аддитивности для независимых случайных величин

Марковский процесс Markov process — случайный процесс, для которого будущее состояние системы зависит только от ее текущего состояния и не зависит от того, как система пришла в это состояние

Нормальное распределение Normal distribution — плотность вероятности имеет вид симметричного колокола, положение которого на оси определяется математическим ожиданием, а ширина дисперсией

Плотность распределения вероятности Probability density function — функция для непрерывной случайной величины, интеграл от которой по заданному интервалу дает вероятность того, что величина примет значение из этого интервала

Преобразование Фурье Fourier transform — математическая операция, которая раскладывает функцию на ее гармонические составляющие, переводя ее из временной области в частотную

Производящая функция Generating function — статистическая характеристика, дифференцирование которой позволяет получать факториальные моменты

Пуассоновский процесс Poisson process — простейший поток случайных событий, для которого вероятность наступления события на малом интервале времени пропорциональна

длине этого интервала и не зависит от предыстории. Интервалы между событиями имеют экспоненциальное распределение

Релаксация Relaxation — процесс возвращения возмущенной системы в состояние равновесия

Статистический ансамбль Statistical ensemble — мысленный набор большого числа идентичных копий системы, находящихся в одинаковых макроскопических условиях, но в разных возможных микросостояниях

Стохастическое дифференциальное уравнение — Stochastic differential equation дифференциальное уравнение, в которое входит случайная функция (шум). Описывает эволюцию системы, подверженной случайным воздействиям

Телеграфный сигнал Telegraph signal — случайный процесс, который скачкообразно меняется между двумя значениями со случайными моментами переключения

Тепловая скорость Thermal velocity — характерная скорость теплового движения частиц (например, среднеквадратичная скорость), определяемая температурой системы

Тепловое движение Thermal motion — беспорядочное, хаотическое движение микрочастиц (атомов, молекул), составляющих вещество. Его интенсивность определяется температурой

Уравнение Фоккера-Планка Fokker-Planck equation — дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее эволюцию во времени плотности вероятности нахождения системы в определенном состоянии

Флуктуация Fluctuation — случайное отклонение физической величины от ее среднего значения

Фурье-образ Fourier transform — результат применения преобразования Фурье к функции. Представляет собой ее представление в частотной области

Характеристическая функция Characteristic function — математическое ожидание от экспоненты, мнимый аргумент

которой умножен на случайную величину. Является преобразованием Фурье плотности распределения вероятности и полностью его определяет

Центральная предельная теорема Central limit theorem — фундаментальная теорема теории вероятностей, утверждающая, что сумма большого числа независимых случайных величин с конечной дисперсией стремится к нормальному распределению, независимо от распределения слагаемых

Центральный момент Central moment — момент случайной величины, вычисленный относительно её математического ожидания

Шум Noise — случайные колебания любой физической природы

9 Источники

Многие задачи сделаны на основе интерактивных демонстраций по статистической, созданных студентами ВМК

cmcstatphys.ilc.msu.ru

Распределение скоростей для смеси газов

Физические модели генерации точечных структур на плоскости

Распределение расстояний между частицами в сосудах различной формы

Блуждания частиц с различными распределениями скоростей

Движение частиц в области градиента температур

Взаимодействие диполей в окружении идеального газа

Флуктуации поршня под действием взаимодействующих частиц

Физические модели в системе осциллирующих рассеивателей под действием силы тяжести

Процессы в газе Ван-дер-Ваальса

Случайное преобразование периодического процесса

Влияние взаимодействия частиц на одномерные случайные структуры

Одномерное движение Броуновской частицы под действием шумов различной периодичности

Моделирование энергии нелинейного взаимодействия в молекуле

Статистика вращения Броуновской частицы

Псевдослучайные структуры точек на поверхности

Построение распределения вероятностей суммы случайных величин

КПД произвольного цикла

Случайный поиск с несколькими целями

Случайный поиск в задачах разной размерности

Определение периодичности случайной структуры

Распределение Больцмана в сосудах различной формы
Бусы в стиле Бохо
Динамика числа частиц в открытом сосуде как модель квантовых процессов
Образование островков в результате случайного блуждания частиц
Равновесное и неравновесное движение поршня
Эффект ускорения Ферми
Разогрев газа в результате периодического движения поршня 3D
Соотношение статистических свойств длины траектории и числа столкновений
Статистика соударений с фрагментом стенки в математическом бильярде
Флуктуации плотности в одномерном газе
Эксперимент: время хаотизации частиц в математическом бильярде в зависимости от кривизны стенки
Соотношение статистических свойств длины траектории и числа столкновений молекул
Нанокластеры
Газ Лоренца
Длина свободного пробега в смеси двух газов
Газ Лоренца с динамическими силовыми центрами
Соударение частиц со стенками сосуда
Длина свободного пробега
Расширение газа в пустоту
Распределение Больцмана
Энтропия
Броуновское движение и эргодичность
Относительная скорость двух частиц
Флуктуации высоты положения поршня
Флуктуации числа частиц
Доска Гальтона

Литература

- 1 О.А. Чичигина *Флуктуационные процессы* — М.: Физический факультет МГУ им. Ломоносова, 2018.
2. Н.Г. Ван-Кампен *Стохастические процессы в физике и химии* — М.: Высшая школа, 1990.
3. Р.Л. Стратонович *Случайные процессы в динамических системах* — Ижевск: ИКИ, 2009. Репринтное издание книги *Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике* — М.: Советское радио, 1961.
4. В.М. Петникова, А.С. Чиркин, О.А. Чичигина *Математические модели флуктуационных явлений. Базовые задачи курса* — М.: Физический факультет МГУ им. Ломоносова, 2017.
5. О.А. Чичигина, В.М. Петникова, А.С. Чиркин *Математические модели флуктуационных явлений. Наглядные задачи курса* — М.: Физический факультет МГУ им. Ломоносова, 2017.
6. Ю.Л. Климонтович *Статистическая физика* — М.: Наука, 1982.
7. Б.Р. Левин *Теоретические основы статистической радиофизики* — М.: Советское радио, 1974.
8. А.Ю. Лоскутов, А.С. Михайлов, *Введение в синергетику* — М.: Наука, 1990.
9. К.В. Гардинер *Стохастические методы в естественных науках* — М.: Мир, 1986.
10. В.Т. Горяинов, А.Г. Журавлев, В.И. Тихонов *Статистическая радиофизика. Примеры и задачи* — М.: Советское радио, 1980.
11. Р.Л. Стратонович, М.С. Полякова *Элементы молекулярной физики, термодинамики и статистической физики* — М.: изд-во МГУ, 1981.
12. С.А.Ахманов, Ю.Е.Дьяков, А.С.Чиркин *Статистическая радиофизика и оптика. Случайные колебания и волны в линейных системах* — М.: Физматлит, 2010 (2-ое издание).
13. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц *Статистическая физика* — М.: 2-ое издание, Наука, 1964.
14. И.П. Базаров, Э.В. Геворкян, П.Н. Николаев *Термодинамика и статистическая физика. Теория равновесных систем* — М.: Изд-во МГУ, 1986.
15. И.А. Квасников *Термодинамика и статистическая физика* Т1 — М.: Едиториал УРСС, 2002.
16. И.А. Квасников *Термодинамика и статистическая физика* Т2 — М.: Едиториал УРСС, 2002.
17. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. *Молекулярная физика* — М.: ФИЗМАТЛИТ, серия *Университетский курс общей физики*, 2016.